

文章编号: 1671-7848(2019)06-1029-06

DOI: 10.14107/j.cnki.kzgc.170115

TORA 系统周期性动态轨迹的模糊控制设计

郑功倍, 高丙团, 刘传德, 谢吉华

(东南大学 电气工程学院, 江苏 南京 210096)



摘要: 欠驱动(Translational Oscillators with Rotating Actuator, TORA)系统的传统控制目标是实现平衡点的稳定控制, 文中针对系统的周期性振荡轨迹给出易于实现的模糊控制设计方法。首先, 基于欠驱动 TORA 系统的动力学分析, 考虑振荡平台的振荡频率, 设计一种振荡平台周期运动、转动小球匀速转动的周期性目标动态轨迹。其次, 基于对状态变量的分析, 选择能量误差作为模糊控制系统的输入量以降低模糊控制器的维度, 采用单边论域隶属度函数设计模糊控制规则, 采用重心法进行解模糊化, 得到易于实现的模糊控制器。最后, 仿真和实验结果验证了所提控制方案的有效性。

关键词: 旋转激励平移振荡器; 欠驱动; 轨迹跟踪; 模糊控制

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Fuzzy Control Design for Periodic Dynamic Trajectory of TORA System

ZHENG Gong-bei, GAO Bing-tuan, LIU Chuan-de, XIE Ji-hua

(School of Electrical Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: Traditional research work on underactuated (Translational Oscillator with Rotational Actuator, TORA) system mainly focuses on stabilizing control of equilibrium points. In this article, a fuzzy control design scheme easy to realize is proposed to steer periodic oscillating trajectories of TORA system. Firstly, based on the dynamics of TORA, the frequency of translational oscillation platform is derived, and then the dynamic periodic orbits are followed, namely, the translational oscillation platform oscillating periodically while the rotational proof mass rotating with the fixed angular velocity. Secondly, based on the analysis of state variables, tracking error of system's energy is employed as the inputs of fuzzy control system so as to reduce the dimension of the control system, membership function using one-side domain is applied to design fuzzy rules and the center of gravity method is used for defuzzification. Consequently, a practical fuzzy controller is achieved. Finally, simulation results and experimental results validate efficiency and practicability of the proposed control scheme.

Key words: Translational oscillators with rotating actuator; underactuated; trajectory tracking; fuzzy control

1 引言

TORA 系统, 是一类旋转激励的平移振荡器系统, 又叫(Rotational-Translational Actuator, RTAC)系统^[1], 由一个驱动的转动小球和未驱动的平移振荡平台组成, 最初是 Bupp 等人^[2]为研究双自旋航天器而提出的简化模型, 现在作为一种欠驱动基准系统, 用来研究非线性系统的控制问题。相比于其他欠驱动系统^[3-7], TORA 系统的控制目标主要是实现平衡点的稳定控制^[8-11]和动态轨迹的跟踪控制^[12],

其中传统控制目标是平衡点的稳定控制, 实现起来相对容易; 动态轨迹的跟踪控制较为困难复杂, 但是有着重要意义, 例如, 振荡平台跟踪给定的振荡运动轨迹是双自旋航天器姿态调整的主动进动过程的简化, 其应用价值不容忽视。

动态轨迹可分为周期性动态轨迹和非周期性动态轨迹, 控制欠驱动基准系统的运动通常需要确定目标周期性轨迹, 并设计合适的控制方法维持该

收稿日期: 2017-05-21; 修回日期: 2017-08-22

基金项目: 国家自然科学基金(11102039); 江苏省“六大人才”高峰计划(2014-ZBZZ-001); 东南大学优秀青年教师项目(2242015R30024)

作者简介: 郑功倍(1990-), 男, 江苏连云港人, 硕士, 主要研究方向为欠驱动系统建模与控制; 高丙团(1981-), 男, 江苏淮安人, 博士, 教授, 主要从事系统的建模与控制、机器人与自动化等方面的教学与科研工作(本文通讯作者)。

基准系统跟踪目标周期性轨迹^[13,14], 对非周期性轨迹的研究则相对较少。动态轨迹跟踪问题在欠驱动系统中的研究与应用尚未成熟, 不过近年来已逐渐引起人们的关注。早期 Chung 等^[15]开始研究内部简单的 Furuta 摆系统, 通过研究状态量与系统能量的关系, 产生了一组周期性轨迹; 后 Shiriaev 等^[16]人提出通过控制输入对系统施加虚约束的控制技术, 将负责的动力学模型简化为简单的虚拟有限维系统, 设计并跟踪目标周期性轨迹, 实现轨迹误差的镇定控制, 并逐渐将该技术应用到 Furuta 摆和车摆等欠驱动系统中^[16,17]; 近年来, 高丙团等人^[18,19]成功地将该控制技术推广到欠驱动 TORA 系统中, 实现了振荡平台周期性轨迹的追踪控制。基于虚约束的轨迹跟踪控制技术虽然有效且具有一定的灵活性, 但设计过程相对复杂, 且某些控制目标不易实现。为了克服虚约束法的不足, 可以根据以模糊理论为代表的智能控制, 通过专家经验设计易于实现的轨迹跟踪控制器。

本文针对 TORA 系统的周期性振荡轨迹, 基于模糊控制设计并实现了系统的轨迹跟踪控制。与现有研究相比, 本文的贡献在于, 一是设计了一种振荡平台周期振荡、转动小球角速度保持定值的动态轨迹, 更加简明直观; 二是使用一维模糊控制的方案, 控制器输入量少, 控制规则简单, 降低了系统计算量, 避免了维数爆炸等问题, 增强了控制方案的实用性; 三是在仿真分析的基础上进行硬件平台的实验研究, 证明所提控制方法的有效性 with 实用性。

2 TORA 系统动力学与动态轨迹设计

2.1 TORA 系统动力学建模

欠驱动 TORA 系统由在平面内做直线运动的振荡平台和安装在其上的做圆周转动的小球组成。示意图, 如图 1 所示。

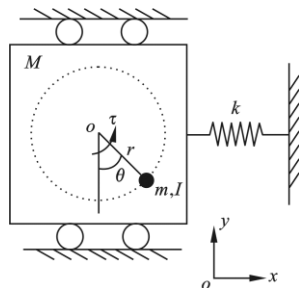


图 1 TORA 系统示意图

Fig. 1 Configuration of TORA system

控制转矩 τ 用于驱动质量为 m 的转动小球运动; 转动小球的旋转半径为 r ; 绕其质心的转动惯量为 I ; 通过劲度系数为 k 的弹簧连接质量为 M 的

振荡平台与固定物, 振荡平台无直接驱动输入。 θ 、 $\dot{\theta}$ 、 $\ddot{\theta}$ 分别为转动小球偏离 y 负半轴的角度、角速度和角加速度; x 、 \dot{x} 、 \ddot{x} 分别为振荡平台的位移、速度和加速度。

由拉格朗日方程, 对 TORA 系统进行动力学建模^[19]。需要说明的是, 在实际情况下, 往往要考虑摩擦力的影响, 因此本文在理想 TORA 动力学模型中引入摩擦力 N_x , 如下式所示。

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + mr \cos \theta \ddot{\theta} - mr \sin \theta \dot{\theta}^2 + kx + N_x = 0 \\ mr \cos \theta \dot{x} + (mr^2 + I)\ddot{\theta} = \tau \end{cases} \quad (1)$$

在 TORA 系统中, 总动能为

$$K = 0.5(M+m)\dot{x}^2 + mr\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + 0.5(I+mr^2)\dot{\theta}^2 \quad (2)$$

总势能为

$$V = 0.5kx^2 \quad (3)$$

2.2 动态轨迹设计

轨迹跟踪控制前提是自由度的动态轨迹设计。其中, 驱动自由度 θ 的控制易于实现, 欠驱动自由度 x 的振荡运动具有周期性, 其振荡周期为 T 。值得注意的是, TORA 系统各自由度间存在非线性耦合, 振荡平台的振荡状态受转动小球运动的影响。

对于 TORA 系统的动态轨迹跟踪控制主要是实现对振荡平台的周期性振荡轨迹跟踪, 对转动小球的状态要求较低, 因此, 当振荡平台追踪至周期性振荡轨迹时, 转动小球的运动轨迹可能有以下几种情况。一是转动小球稳定在 x 轴上, 系统蜕化为弹簧振子系统, 这种情况常出现在无摩擦的理想状态下, 实际模型中由于摩擦力的存在会导致振幅不断衰减。二是转动小球在控制转矩的作用下, 稳定在非 x 轴上的某个位置, 与振荡平台相对静止或在平衡位置附近振动。实际情况下, 由于摩擦力的存在, 转动小球必然保持振动, 以补偿摩擦力对系统造成的能量损耗。此外, 旋转小球在平衡位置附近振动形式较为直观的情形之一是与振荡平台同时双向振动, 且同时振动至最大振幅处。这种情况下, 由于在 y 轴处转动小球与振荡平台的耦合作用最大, 常被选作研究点。三是转动小球匀速单向旋转, 转矩为系统提供能量, 补偿因摩擦力而导致的系统能量损耗, 这种轨迹较简单, 也是本文所要设计的轨迹。

设计 x 的目标周期性轨迹 $x_d(t)$ 为

$$x_d(t) = x_A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \quad (4)$$

式中, x_A 、 φ 分别为给定动态轨迹的振幅、初相角。在本文的设计中, 对周期性轨迹的跟踪, 主要

是对振荡平台振幅的追踪，是否追踪到所设计目标轨迹的标志是振荡平台的振幅是否达到 x_A ，而忽略初相角等因素。

对于 TORA 系统的动态轨迹跟踪，可通过转动小球在 $[0.5\pi, 2.5\pi]$ 上系统的运动过程进行分析说明。 $\theta = 0$ 时，转动小球在直流电机的驱动下开始逆时针转动； $\theta = 0.5\pi$ ，转动小球运动至 x 轴，对振荡平台的冲量在 x 轴方向的分量为 0，此时振荡平台振荡至负向最大位移处，摩擦力的方向从 x 轴正方向向负方向的过渡； $\theta \in (0.5\pi, 1.5\pi)$ ，转动小球在 y 轴正半轴运动，其转动的耦合作用使得振荡平台具有正冲量而向 x 轴正方向运动，此时振荡平台所受摩擦力沿 x 轴负方向； $\theta = 1.5\pi$ ，转动小球对振荡平台冲量在 x 轴方向的分量为 0，此时振荡平台振动至正向最大位移处，摩擦力的方向从 x 轴负方向向正方向的过渡； $\theta \in (1.5\pi, 2.5\pi)$ ，转动小球在 y 轴负半轴运动，其转动的耦合作用使振荡平台具负冲量而向 x 轴负方向运动，此时振荡平台所受摩擦力沿 x 轴正方向； $\theta = 2.5\pi$ ，转动小球再次运动至负向最大位移处。转动小球保持单向旋转，系统周而复始地运动，直到追踪至所设计的动态轨迹。

3 模糊控制设计

为实现对目标轨迹的跟踪控制，一般情况会选择系统状态变量与目标轨迹的偏差量作为模糊控制器的输入量。在 TORA 系统中，状态变量为转动小球的转角 θ 及角速度 $\dot{\theta}$ 和振荡平台的位移 x 及速度 \dot{x} ，即使每个变量划分 3 个模糊子集，推理规则也会多达 81 条，实现起来较为麻烦。为避免模糊控制维数爆炸的问题，本文将系统的状态量进行整合，设计一维模糊控制器。

TORA 系统的总能量

$$E = K + V \tag{5}$$

其中， $E_1 = 0.5(M + m)\dot{x}^2 + 0.5kx^2$ (6)

式(6)为振荡平台与转动小球平动动能与弹簧弹性势能之和，这里不妨将其称为平动机械能；

$$E_2 = 0.5(I + mr^2)\dot{\theta}^2 \tag{7}$$

式(7)为转动小球的转动动能； $mr\dot{x}\cos\theta$ 项相对较小，根据实验仿真可发现其数值不到总能量 E 的十分之一，且其物理意义不明确，因此在这里将其忽略。对系统总能量用

$$\tilde{E} = 0.5(M + m)\dot{x}^2 + 0.5kx^2 + 0.5(I + mr^2)\dot{\theta}^2 \tag{8}$$

近似表示。

在振荡平台做周期性振荡的过程中，平动机械能守恒，可由所设计的动态轨迹的最大位移处的弹

性势能确定，即

$$E_{1d} = 0.5kx_A^2 \tag{9}$$

TORA 系统是研究双自旋航天器而提出的简化模型，与双自旋航天器消旋过程中的不稳定现象相似，TORA 系统具有共振捕获的现象，当控制转矩 τ 不是很大时，转动小球的转动角速度会维持在系统共振角速度附近。故平衡状态下 $\dot{\theta}$ 是确定的，为 $\dot{\theta}_d$ 。由表达式(8)，其他量均为系统固定参数，在平衡状态下转动小球的转动动能也是确定的，为

$$E_{2d} = 0.5(I + mr^2)\dot{\theta}_d^2 \tag{10}$$

E_{1d} 与 E_{2d} 之和为平衡状态下系统的总能量，即为期望系统能量

$$E_d = E_{1d} + E_{2d} \tag{11}$$

由系统的状态量可确定系统实时的能量，当系统实时能量追踪到期望系统能量时，系统追踪至所设计动态轨迹，达到平衡状态。由此，设计一维模糊控制器，输入量

$$e_E = E_d - \tilde{E} \tag{12}$$

为系统能量偏差项，输出量为控制转矩 τ 。

确定了模糊控制器的输入、输出变量之后，还需针对模糊控制器的输入、输出空间，各自定义一个语言变量，即将输入输出量模糊化。这里需要设计基本论域、模糊论域和量化因子。基本论域是变量变化的实际范围，模糊论域是量化处理后的取值范围，量化因子表示它们之间对应的比例关系。

模糊控制系统结构图，如图 2 所示。

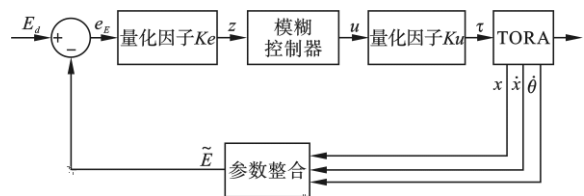


图 2 模糊控制系统结构图
Fig. 2 Framework of fuzzy control system

在设计论域时，一般使用双边论域。但对于本文中的模型，由于摩擦力的存在，即使补偿过度导致振荡平台振幅过大，不施加反向转矩，也可在摩擦力的作用下消耗系统能量，使之很快回到正常控制范围内。在本文中，单边论域已经能够满足需要。这里设其模糊论域均为 $[0,1]$ 。

在模糊控制隶属度函数设计过程中，隶属度函数形状较尖时，分辨率较高，输入引起的输出变化比较剧烈，控制灵敏度较高；而曲线形状较缓时，分辨率较低，控制特性也比较平缓，具有较好的系统稳定性。所以在输入较大的区域采用低分辨率曲

线，在输入较小的区域采用高分辨率曲线，当输入接近零时也选用高分辨率曲线。

遵循以上原则，设计输入和输出的隶属度函数，如图3所示。

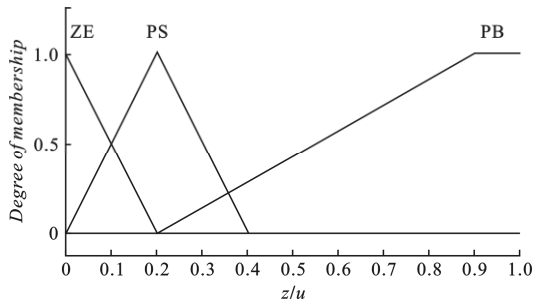


图3 隶属度函数
Fig. 3 Membership function

每个变量用3个模糊子集 [ZE, PS, PB] 描述。输入 z 为正时，系统实时能量低于期望系统能量，应该为系统提供正向转矩，且能量不平衡量越大，提供的控制转矩也越大；输入 z 为0时，系统实时能量追踪到期望系统能量，此时停止提供控制转矩。

根据以上分析，得到对应的模糊控制规则，见表1。

表1 模糊控制规则表
Tab. 1 Fuzzy control rules

输入量 z	输出量 u
PB	PB
PS	PS
ZE	ZE

最后，需要将模糊控制器进行解模糊化。模糊控制器有很多种去模糊化的方法，其中，重心法是对模糊输出量中各元素以及其对应的隶属度函数求加权平均值，得到较为精确的输出控制量，其计算公式为

$$z_0 = \frac{\int \mu_C(z) \cdot z dz}{\int \mu_C(z) dz} \quad (13)$$

式中， $\mu_C(z)$ 为相应模糊子集中的隶属度函数。相比较而言，重心法计算量比较大，但模糊控制器具有更平滑的输出推理控制，性能较好，因此本文采用重心法解模糊化。

4 仿真与实验

为了检验所设计的模糊控制方法，下面将从 Matlab/Simulink 仿真和实际硬件平台分别做实验进行分析研究。系统参数基于硬件平台的实际测量数据选取，系统参数基于硬件平台的测量数据选取为

$M = 5.2 \text{ kg}$ ， $m = 0.3 \text{ kg}$ ， $I = 0.001503 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ， $r = 0.695 \text{ m}$ 和 $k = 1773 \text{ N/m}$ 。

由于弹簧存在弹性限度的问题，又为了保证实验效果，经多次实验观测后确定振荡平台的目标周期性轨迹振幅取为 $x_d = 0.008 \text{ m}$ ； $\dot{\theta}_d$ 是平衡状态下转动小球的转动角速度，其值是固定的。

在 Matlab/Simulink 中对 TORA 模型施加合适的转矩，测得平衡状态下转动小球的定值角速度为

$$\dot{\theta}_d = 15.3 \text{ rad/s}$$

平衡状态下，小球与小车的振动周期一致，因此有

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}_d} \quad (14)$$

系统摩擦力较为复杂，由于库伦+粘滞摩擦模型相对简单使用，实际模拟摩擦作用效果较好，本文使用此模型来辨识实际摩擦力 N_x ，具体形式为

$$N_x = \mu_1 (M + m) g \text{sgn}(\dot{x}) + \mu_2 \dot{x} \quad (15)$$

式中， μ_1 和 μ_2 均为摩擦系数。

在硬件平台设计阻尼振荡实验，根据多次实验结果辨识可得 $\mu_1 = 0.017$ ， $\mu_2 = 0.5$ 。

4.1 TORA 系统仿真实验

利用 Matlab/Simulink 平台搭建仿真模型，系统参数如前文，调节参数 $K_e = 0.5$ ， $K_u = 0.6$ 。

在初始条件 $(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}, \tau) = (0, 0, 0, 0, 0)$ 下，仿真结果，如图4所示。

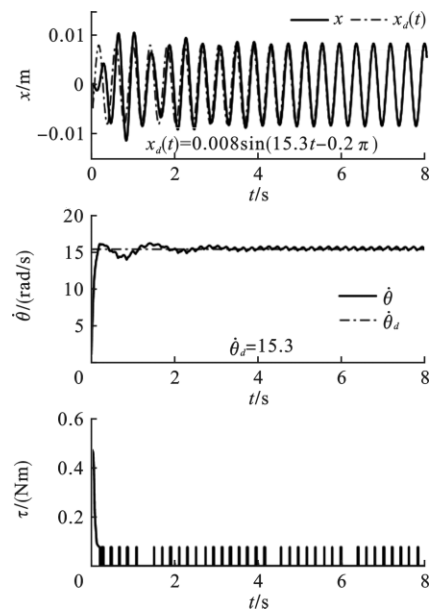


图4 有摩擦周期性轨迹跟踪仿真
Fig. 4 The simulation of periodic orbit tracking with friction

由仿真波形图可以看出，0时刻，在转动小球

转动的耦合作用下, 振荡平台具有负冲量而向 x 轴负方向开始运动, 与之前的分析结果一致。

4 s 左右振荡平台的位移 x 跟踪至目标周期性轨迹 $x_d(t)$, 转动小球角速度 $\dot{\theta}$ 达到定值角速度 $\dot{\theta}_d$; 此后, 振荡平台沿着周期性轨迹 $x_d(t)$ 运动, 转动小球运动形式近似于匀速圆周运动, 角速度稳定在定值 $\dot{\theta}_d$ 附近略有波动。

控制转矩 τ 维持系统的能量恒定, 补偿由于滑动摩擦力对系统造成的能量损耗。当系统能量低于期望能量时, 通过输入转矩为系统提供能量; 而当系统能量高于期望能量时, 提供的输入转矩为 0。系统达到平衡状态后, 控制转矩在 0 与非 0 之间转换, 在时间上呈现为脉冲波的形式, 维持着系统的动态平衡。仿真结果证明了所设计的模糊控制方法在实现目标周期性轨迹跟踪的有效性。

4.2 TORA 系统硬件平台实验

为了进一步说明所设计的模糊控制方案的实用性, 在 TORA 硬件平台验证所提出的方案。

TORA 实验平台, 如图 5 所示。

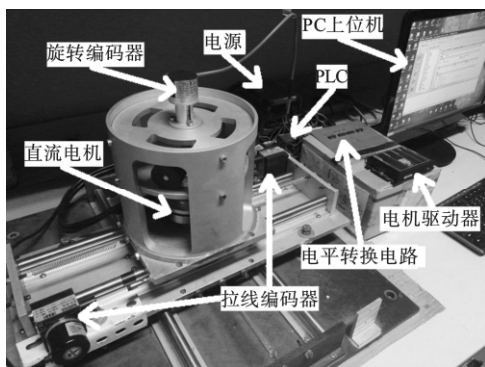


图 5 TORA 系统装置平台
Fig. 5 Platform for TORA system

图中, 振荡平台在直线轴承导轨上进行直线运动; 通过 MAXON 直流盘式无刷电机驱动转动小球的运动; 采用 SIEMENS 的 S7-200 型(Programmable Logic Controller, PLC)进行编程控制; 转动小球转角由旋转编码器进行监测, 测量精度为 4 096 p/r; 振荡平台位移由拉线编码器进行监测, 测量精度为 1 000 p/10 mm; 基于 VC++ 开发了 PC 上位机监控系统, 进行数据监控和采集。

装置的相关参数和初始条件与仿真一致。从实验结果可以看出, 1.8 s 左右振荡平台位移 x 跟踪至轨迹 $x_d(t)$, 且之后基本与所设计轨迹保持一致; 转动小球角速度 $\dot{\theta}$ 达到定值 $\dot{\theta}_d$ 并在其附近波动; 控制转矩的波形与仿真有些偏差, 脉冲宽度相比于仿真较大, 这应该是由采样精度造成的。硬件平台和仿真在整体趋势和幅值上基本一致, 证明了所设计

控制方案的实用性。另外, 在模糊控制器设计中, 维数越高, 控制越精确, 效果也越好, 但维数过高控制器结构就会变得过于复杂, 数据运算量大, 控制算法实现起来也比较难。

本文所设计的一维模糊控制器较为简单, 能在实现轨迹追踪控制目标的同时, 有效地避免模糊控制维数爆炸的现象, 降低了系统的计算量, 增强了控制方案的有效性。

周期性轨迹跟踪实验结果, 如图 6 所示。

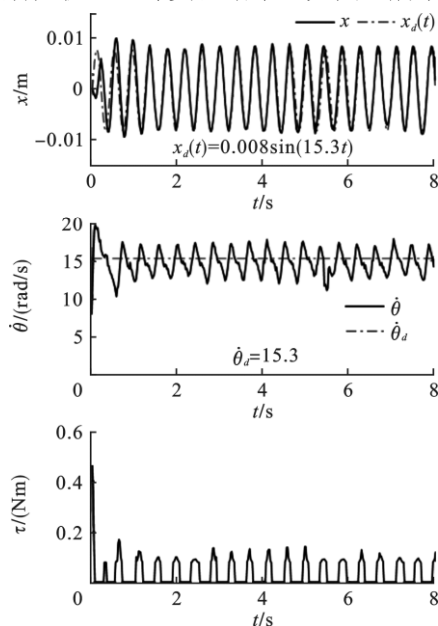


图 6 周期性轨迹跟踪实验

Fig. 6 The experiment of periodic orbit tracking

5 结 论

本文针对欠驱动 TORA 系统的动态轨迹跟踪控制进行研究, 基于模糊控制的方法, 设计了一种振荡平台周期运动、转动小球角速度保持定值的动态轨迹。所设计的控制器基于 TORA 系统的共振捕获现象, 将系统的状态量进行整合, 以能量偏差项为输入, 控制转矩为输出, 设计一维模糊控制器, 在实现轨迹追踪控制目标的同时, 有效地避免模糊控制维数爆炸的现象, 优化了系统的计算量。

数字仿真和硬件平台实验表明, 所设计的控制器能够使 TORA 系统追踪至期望振荡轨迹, 实验结果证明了该方法的有效性与实用性。本文的研究结果对于一类欠驱动系统的轨迹跟踪控制设计具有借鉴意义。

参考文献(References)

- [1] Sun N, Wu Y M, Fang Y C, et al. Nonlinear Continuous Global Stabilization Control for Underactuated RTAC System: Design, Analysis, and Experimentation [J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2017, 22(2): 1104-1115.

- [2] Bupp R T, Bernstein D S, Coppola V T. A Benchmark Problem for Nonlinear Control Design[J]. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 2010, 8(4-5):307-310.
- [3] Sun N, Fang Y G, Chen H, et al. Adaptive Nonlinear Crane Control With Load Hoisting/Lowering and Unknown Parameters: Design and Experiments[J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2015, 20(5): 2107-2119.
- [4] 侯明冬, 刘金琨, 田杰. 欠驱动四旋翼飞行器全局轨迹跟踪滑模控制[J]. *控制工程*, 2016, 23(6): 928-932.
Hou M D, Liu J K, Tian J. Global Stability Trajectory Tracking of Underactuated Quadrotor[J]. *Control Engineering of China*, 2016, 23(6): 928-932.
- [5] 侯涛, 范多旺, 杨剑锋. 基于 T-S 型的平面倒立摆双闭环模糊控制研究[J]. *控制工程*, 2012, 19(5): 20-23.
Hou T, Fan D W, Yang J F. Study of Double Closed-Loop Fuzzy Control for Planar Inverted Pendulum on Takagi-Sugeno Model[J]. *Control Engineering of China*, 2012, 19(5): 20-23.
- [6] Shiriaev A, Ludvigsen H, Egeland O, et al. On Global Properties of Passivity Based Control of the Inverted Pendulum[C]. *IEEE Conference on Decision & Control*. IEEE, 1999.
- [7] Xin X, Yamasaki T. Energy-Based Swing-Up Control for a Remotely Driven Acrobot: Theoretical and Experimental Results[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2012, 20(4): 1048-1056.
- [8] Fabio C. Output Regulation for the TORA Benchmark via Rotational Position Feedback[J]. *Automatica*, 2011, 47(3): 584-590.
- [9] Xia D Y, Chai T Y, Wang L Y. Fuzzy Neural-Network Friction Compensation-Based Singularity Avoidance Energy Swing-Up to Nonequilibrium Unstable Position Control of Pendubot[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2014, 22(2): 690-705.
- [10] Lee C H, Chang S K. Experimental Implementation of Nonlinear TORA System and Adaptive Backstepping Controller Design[J]. *Neural Computing Applications*, 2012, 21(4): 785-800.
- [11] Gao B T, Xu J, Zhao J, et al. Stabilizing Control of an Underactuated 2-Dimensional TORA with Only Rotor Angle Measurement[J]. *Asian Journal of Control*, 2013, 15(3): 1477-1488.
- [12] Petres Z, Baranyi P, Korondi P, et al. Trajectory Tracking by Tp Model Transformation: Case Study of a Benchmark Problem[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2007, 54(3): 1654-1663.
- [13] Zhang A C, She J H, Lai X Z, et al. Motion Planning and Tracking Control for an Acrobot Based on a Rewinding Approach[J]. *Automatica*, 2013, 49(1): 278-284.
- [14] Korkmaz O, Ider S K, Ozgoren M K. Trajectory Tracking Control of an Underactuated Underwater Vehicle Redundant Manipulator System[J]. *Asian Journal of Control*, DOI: 10.1002/asjc.1291, 2016.
- [15] Chung C C, Hauser J. Nonlinear Control of a Swinging Pendulum[J]. *Automatica*, 1995, 31(6): 851-862.
- [16] Shiriaev A, Perram J W, Canudas-De-Wit C. Constructive Tool for Orbital Stabilization of Underactuated Nonlinear Systems Virtual Constraints Approach[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(8): 1164-1176.
- [17] Gregory J, Olivares A, Staffetti E. Energy-Optimal Trajectory Planning for the Pendubot and the Acrobot[J]. *Optimal Control Applications & Methods*, 2013, 34(34): 275-295.
- [18] Gao B T, Liu C D, Cheng H T. Virtual Constraints Based Control Design of an Inclined Translational Oscillator with Rotational Actuator System[J]. *Shock and Vibration*, 2015, 22(4-5): 1-9.
- [19] 高丙团, 孙国兵. TORA 转子位置反馈的稳定控制方法[J]. *电机与控制学报*, 2010, 14(8): 58-62.
Gao B T, Sun G B. Stabilization Control Method with Rotor Angle Feedback for TORA System[J]. *Electric Machines and Control*, 2010, 14(8): 58-62.