

学校代码: 10286  
分类号: TP273  
密 级: 公开  
U D C: 621.3  
学 号: 142197



# 东南大学

## 硕士学位论文

### TORA 系统周期性轨迹稳定控制策略研究

研究生姓名: 刘传德

导师姓名: 谢吉华 高丙团

陈 宁

申请学位类别 工程硕士 学位授予单位 东南大学

一级学科名称 电气工程 论文答辩日期 2016年 11月 24日

二级学科名称 电力电子与电力传动 学位授予日期 2016年 月 日

答辩委员会主席 汤奕 副教授 评 阅 人 孙黎霞 副教授

周 霞 高工

汤奕 副教授

2016年 12月 日



東南大學  
硕士学位论文

TORA 系统周期性轨迹稳定控制策略研究

专业名称:           电气工程          

研究生姓名:           刘传德          

校内导师:           谢吉华  高丙团          

校外导师:           陈宁



# STABILIZING TRACKING CONTROL STRATEGIES FOR DYNAMIC PERIODIC ORBIT OF UNDERACTUATED TORA SYSTEMS

A Thesis Submitted to

Southeast University

For the Academic Degree of Master of Engineering

BY

Liu Chuan-De

Supervised by

Xie Ji-Hua, Gao Bing-Tuan

and

Chen Ning

School of Electrical Engineering

Southeast University

December 2016



## 东南大学学位论文独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得东南大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

研究生签名：\_\_\_\_\_日期：\_\_\_\_\_

## 东南大学学位论文使用授权声明

东南大学、中国科学技术信息研究所、国家图书馆有权保留本人所送交学位论文的复印件和电子文档，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文。本人电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。除在保密期内的保密论文外，允许论文被查阅和借阅，可以公布（包括以电子信息形式刊登）论文的全部内容或中、英文摘要等部分内容。论文的公布（包括以电子信息形式刊登）授权东南大学研究生院办理。

研究生签名：\_\_\_\_\_导师签名：\_\_\_\_\_日期：\_\_\_\_\_



## 摘要

欠驱动系统是指独立控制输入量少于系统自由度的一类非线性系统,广泛存在于交通运输、机器人、航空航天器等复杂系统领域;欠驱动系统由于控制输入的缺失使得其控制问题成为控制领域富有挑战性的研究热点之一。具有旋转激励的平移振荡(TORA)器是由欠驱动的平移小车及安装在其上的驱动旋转小球组成,是典型的欠驱动基准系统。针对TORA系统,传统的控制目标主要集中在平衡点镇定,本文研究其周期性轨迹的跟踪控制,主要研究内容包括:

首先,基于拉格朗日方程建立了斜面TORA系统的动力学模型,分析了系统动力学特征;设计了两种典型的周期性轨迹,包括同时实现平移小车和旋转小球周期性振荡的周期性轨迹,以及平移小车周期性运动、旋转小球保持定值的周期性轨迹。

其次,采用虚约束技术,给出了同时实现平移小车和旋转小球周期性振荡的周期性轨迹设计,构造了平移小车与旋转小球间的虚约束方程,设计了控制李雅普诺夫函数,基于李雅普诺夫稳定第二定理得出了系统控制器,实现了目标周期性轨迹的跟踪控制;通过数字仿真证明了所设计的基于虚约束控制方法的有效性。

再次,对比虚约束控制方法,针对平移小车的周期性运动,给出一种基于系统能量的控制设计方案。该方案基于系统总能量守恒的思想,将系统总能量考虑到控制李雅普诺夫函数中得到系统控制器,实现了目标周期性轨迹的跟踪控制,设计过程简洁;通过与虚约束法的数字仿真实验对比说明了该方案的可行性与优越性。

最后,搭建了一个TORA装置平台,对装置平移振荡过程中的摩擦力进行建模辨识;采用前馈补偿的思想对能量法控制策略进行再设计,给出了一种基于摩擦补偿的能量法轨迹跟踪控制方案。数字仿真与实验结果证明了所提控制方案的有效性和实用性。

本文针对欠驱动TORA系统进行周期性轨迹跟踪的控制思路及考虑摩擦补偿的控制设计方法,可进一步推广至其它欠驱动系统的设计和实践中。

**关键词:** TORA系统; 轨迹跟踪; 欠驱动; 控制李雅普诺夫函数; 摩擦补偿



## Abstract

Underactuated mechanical systems (UMS) are mechanical control systems with fewer control inputs than the number of configuration variables. Control of UMS is currently an active and challenging field due to the lack of control inputs and their broad applications in transportation vehicles, robotics and aerospace vehicles. Translational oscillator with rotational actuator (TORA) system consisting of one unactuated translational cart and an actuated rotational proof-mass is a benchmark of UMS. The conventional research work for TORA system mainly focuses on stabilizing control of equilibrium points. This thesis focuses on its dynamic periodic orbit tracking control, the main contents include:

Firstly, based on the Euler-Lagrange equation, the dynamics of inclined TORA system is discussed, particularly, dynamics and control problems of TORA system are focused. In addition, two kinds of typical dynamic periodic orbits are designed, namely, translational cart and rotational proof-mass tracking their dynamic periodic orbits respectively, and translational cart tracking dynamic periodic orbit while rotational proof-mass being stabilized at the fixed angle.

Secondly, by utilizing virtual constraints technique, the periodic orbits for translational cart and rotational proof-mass are designed, and a virtual constraints equation between translational cart and rotational proof-mass is also presented. Then, a proper control Lyapunov function is designed. A virtual constraints based controller is derived to realize the desired periodic orbits tracking according to Lyapunov's second stability theory. The performance and feasibility of the proposed control design methodology are illustrated and analyzed with numerical simulations.

Thirdly, different from the virtual constraints design methodology, the energy based control scheme is proposed to steer translational cart tracking its periodic orbit only. Based on the principle of energy conservation, the overall system energy is included in the control Lyapunov function for deriving the controller to realize the periodic orbit tracking. In addition, the control design process is concise. Simulation results demonstrate the feasibility and advantage of the energy based control scheme comparing to the virtual constraints based methodology.

Finally, an experimental platform for TORA is developed. The friction model for the translational motion of cart is identified. Consequently, the feedforward compensation idea is employed to redesign the energy based control scheme, which leads to an energy based controller with friction compensation. Simulation results and the experimental results demonstrate its efficiency and practicability.

The design principle of periodic orbits tracking and the design methodologies with friction compensation for underactuated TORA system can be extended to the design and implementation for other underactuated systems.

**Keywords:** TORA systems; Orbit tracking; Underactuated; Control lyapunov function; Friction compensation



# 目 录

摘 要 .....	I
Abstract .....	III
目 录 .....	III
第一章 绪 论 .....	1
1.1 课题来源及研究目的与意义 .....	1
1.2 国内外研究现状与分析 .....	2
1.2.1 欠驱动基准系统研究现状 .....	2
1.2.2 TORA 系统控制研究现状 .....	7
1.3 论文研究内容 .....	9
1.4 科研资助情况 .....	10
第二章 动力学建模与动态轨迹 .....	11
2.1 拉格朗日方程 .....	11
2.2 TORA 动力学建模 .....	11
2.3 TORA 动力学特性分析 .....	14
2.3.1 动力学特征 .....	14
2.3.2 平衡点分析 .....	15
2.3.3 能控性分析 .....	17
2.3.4 仿真验证 .....	19
2.4 动态轨迹 .....	20
2.4.1 定义 .....	20
2.4.2 周期性轨迹与平衡点关系 .....	21
2.4.3 周期性轨迹形式 .....	21
2.5 本章小结 .....	24
第三章 基于虚约束法的 TORA 系统周期性轨迹跟踪 .....	25
3.1 虚约束概念 .....	25
3.1.1 机械机构的虚约束 .....	25
3.1.2 控制构造的虚约束 .....	25
3.1.3 虚约束一般形式 .....	26
3.2 虚约束控制设计 .....	26
3.2.1 虚约束的设计 .....	26
3.2.2 周期性轨迹设计 .....	28
3.2.3 虚约束的镇定控制设计 .....	29
3.2.4 周期性轨迹镇定控制设计 .....	30
3.3 仿真验证 .....	31

3.4 本章小结 .....	34
第四章 基于能量法的 TORA 系统周期性轨迹跟踪 .....	35
4.1 保守系统 .....	35
4.1.1 保守系统运动的周期性 .....	35
4.1.2 保守系统的能量守恒 .....	36
4.2 能量法控制设计 .....	37
4.3 稳定性分析 .....	39
4.4 仿真验证 .....	40
4.4.1 验证性仿真验证 .....	40
4.4.2 对比性仿真验证 .....	41
4.5 本章小结 .....	42
第五章 TORA 装置与实验研究 .....	43
5.1 实验装置 .....	44
5.2 装置系统的摩擦辨识 .....	45
5.2.1 参数辨识 .....	45
5.2.2 摩擦补偿方式 .....	47
5.3 基于摩擦补偿的能量法控制器再设计 .....	48
5.4 实验研究 .....	50
5.5 本章小结 .....	52
第六章 总结与展望 .....	53
6.1 总结 .....	53
6.2 展望 .....	54
参考文献 .....	55
攻读硕士期间的研究成果 .....	61
一、发表论文 .....	61
二、申请专利 .....	61
致 谢 .....	63

# 第一章 绪论

## 1.1 课题来源及研究目的与意义

由控制输入量与系统自由度数量间的差异,控制系统的驱动方式可分为冗余驱动系统 (Redundant systems)、完全驱动系统 (Fully-actuated mechanical systems, FMS) 与欠驱动系统 (Underactuated mechanical systems, UMS)。

冗余的广义概念是指事物数量超过了规定数量;冗余驱动系统即指系统中控制驱动量大于系统自由度的一类驱动方式<sup>[1]</sup>。冗余驱动系统具有更高的刚度、更大的承载能力和更好的动力学性能,因此该类系统适合于高速和重载的应用场合<sup>[2]</sup>。

完全驱动系统是指系统自由度分别由对应电机驱动控制,控制输入量与系统自由度数量一致<sup>[3]</sup>。但是,系统内部常由拓扑结构或约束条件存在耦合作用,各自由度和输入量间的运动并不完全独立,某些自由度的运动可由另一些自由度带动间接实现,导致完全驱动系统内部某些自由度对应的电机驱动是冗余的<sup>[4]</sup>。在工业应用方面,冗余系统具有可靠性高,驱动裕度大等优点;但是其大体积、高能耗与高制造成本的问题却难以忽视。特别是在如今家居环境中需要机械系统小型化智能化的需求下,该问题则显得尤为突出,亟须一类可由较少电机驱动较多的自由度完成特定目标运动的系统,因此欠驱动系统越来越受到人们的重视。

欠驱动系统是指系统控制输入量少于系统自由度的一类非线性系统;实现较少的系统输入量控制较多系统自由度的运动,是非线性系统中优势明显的一类分支;在航空航天和交通运输等领域的发展和应用的的重要组成部分,最初常见于机械控制系统领域<sup>[5,6]</sup>。

UMS 的欠驱动特性的由来通常可归纳为四点:(1)系统本身动力学模型是欠驱动,如双自旋航天器、直升机、龙门吊车、二轮平衡车等;(2)全驱动失败导致,如水面舰艇、航行器等;(3)优化成本或特殊目的设计,如柔性连杆机器人;(4)科学研究高阶 UMS 控制而人为设计出创造较复杂的低阶非线性系统,如倒立摆系统、球棒系统、二维旋转平移振荡系统。

欠驱动系统结构简单且控制成本低,相对于完全驱动系统而言,易于分析和建立整体系统的动力学;另外,由于系统非线性强、参数摄动难、控制量受限和目标控制多样化等因素,欠驱动系统结构及控制策略往往又很复杂,便于研究与验证非线性控制所提各种策略的有效性与实用性。正是这些特点,使其特别适合于航空航天等对能耗、重量和可靠性敏感的领域。因此研究欠驱动系统的动力学与控制问题一直是非线性动力学和控制理论相关领域的研究热点之一,其分析和控制设计也是兼具趣味性和挑战性的研究。

欠驱动系统的控制问题在实际控制应用和理论研究两个层面上,都具有重要的研究价值,具体原因可概括为以下四个方面:

(1) 低成本低耗能。以汽车为例的欠驱动系统,大部分的动力由不可再生能源提供,然而化石能源危机与环境污染是当下可持续发展必须解决的问题。实际系统若适当

采用欠驱动特性可使驱动数量减小,不仅可以降低系统制造成本、实现系统小型化轻质化,还会减少系统输入能源的消耗,这些特质在航空航天与智能家居机器人方面极其重要。因此,从节约成本与能源层面上而言,如何利用较少的驱动输入来控制系统是一个有意义的尝试。

(2) 服务生活应用。大量的欠驱动系统已存在于实际生活中,早期人们仅研究欠驱动系统的个别对象,比如充电汽车、歼击机、宇宙飞船、直升机、水面舰艇和潜水艇等。然而,直接研究欠驱动系统具有的普遍特性可用来解决很多实际应用中个别对象的控制问题。

(3) 控制功能保障。完全驱动系统在运行过程中存在驱动故障的可能性,驱动的意外缺失会在某种程度上造成险情或经济损失。在一些特殊应用情况下,为了避免驱动故障发生,人们常采用增加系统驱动备用的办法,但是备用驱动只是增加了系统安全裕度,其本身还是会发生故障。较为可靠的解决方法是在完全驱动系统驱动故障的同时,转换为欠驱动系统控制,通过设计可适用欠驱动系统的控制器来确保系统的功能稳定。

(4) 科学研究热点。欠驱动系统属于非线性系统的范畴,解决欠驱动系统的控制问题有助于研究传统非线性系统的控制问题。对于完全驱动系统,其研究和实践技术较为成熟,已经有了诸如精确反馈线性化方法、基于无源理论的控制策略等可以用于整类系统控制的研究成果;对于欠驱动系统,除 Spong 提出用以简化欠驱动系统的部分反馈线性化方法<sup>[7]</sup>外,尚未发现可适用于整类欠驱动系统控制的研究成果。因此,欠驱动系统的控制问题至今依然是控制领域的热点和难点。

本文针对欠驱动 TORA 系统的运动控制研究是其周期性轨迹跟踪问题,其目的在于:建立更具普遍意义的斜面 TORA 系统动力学模型,并设计其周期性轨迹,给出两种基于不同方法的欠驱动 TORA 系统非线性跟踪控制策略;搭建欠驱动 TORA 系统装置平台,设计具有摩擦补偿功能的能量法控制策略,实现了 TORA 系统装置周期性轨迹的跟踪控制策略的实用性。

## 1.2 国内外研究现状与分析

欠驱动系统的精确定义<sup>[5]</sup>如下:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u} \quad (1-1)$$

其中  $\mathbf{q}$  是独立广义坐标的状态向量,  $\mathbf{f}(\cdot)$  是表示系统动力学的向量场,  $\dot{\mathbf{q}}$  是广义的速度向量,  $\mathbf{G}(\mathbf{q})$  是输入矩阵,  $\mathbf{u}$  是广义输入力。 $\mathbf{q}$  的维数就定义为系统的自由度。如果其外部广义输入力不能够同时在形态空间的所有方向产生加速度,即  $\text{rank}(\mathbf{G}) < \dim(\mathbf{q})$ , 则称系统(1-1)为欠驱动系统。

### 1.2.1 欠驱动基准系统研究现状

1994 年, Spong 提出了可简化欠驱动系统动力学的部分反馈线性化方法<sup>[7]</sup>, 该方法虽然在形式上实现了欠驱动系统动力学的统一, 但整类欠驱动系统控制设计依然缺少通

用研究结果。因此，人们通常都是针对具体的某一领域或者一类欠驱动系统进行研究。

### 1.2.1.1 电气领域

在电力系统的新能源领域,经典的三相电压下 PWM 整流器就是一种欠驱动系统<sup>[8]</sup>。在如图 1-1 (a) 所示系统经过电路等效以及  $abc$  到  $dq$  坐标变换后得到如图 1-1 (b) 系统。如图 1-1 (b) 所示,该系统的驱动输出为有功电流  $i_d$ 、无功电流  $i_q$  和直流电压  $v_0$ ,系统自由度为 3;而 PWM 整流器的控制输入为  $dq$  轴的三相交流开关函数记为  $S_d$  与  $S_q$ ,因此系统输入个数为 2。

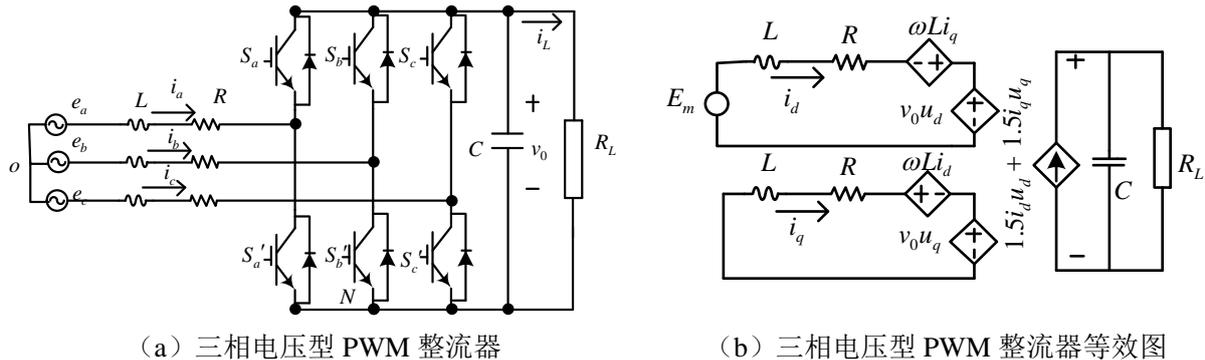


图 1-1 三相电压型 PWM 整流器

三相电压型 PWM 整流器的欠驱动特性可由对该系统建立的 Euler-Lagrange 数学模型得以证明。另外,欠驱动系统已取得非线性控制理论同样适用于三相电压型 PWM 整流器的非线性控制,目前已有学者将自适应跟踪控制方案应用到三相电压型 PWM 整流器的控制<sup>[9]</sup>。基于经典的三相电压下 PWM 整流器拓扑结构,以较大范围投入电力系统电压稳定控制的静止同步补偿器 (Static synchronous compensator, STATCOM) 也具有欠驱动特性<sup>[10]</sup>。并且,学者们已将反馈线性化方法运用到 STATCOM,对电力系统控制方式提供了一种新思路<sup>[11]</sup>。

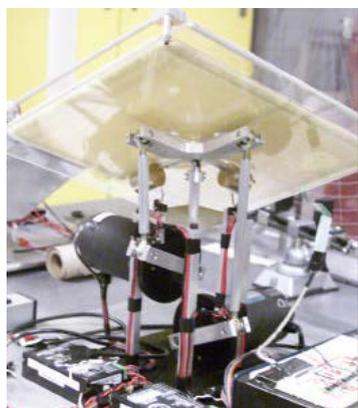
### 1.2.1.2 机械领域

在应用更为成熟的机械系统领域,欠驱动系统的表达形式广泛,表达式不具有统一性,很难确立完全适用的控制理论,因此在实际中,针对欠驱动系统的运动控制研究大都集中在某一类系统中,每一类系统均有一些比较有代表性的典型系统,被称之为基准系统 (Benchmark),即通过组合和演变往往可以组成实际中欠驱动系统。这样的系统有很多,比如球棒系统、吊车系统、车摆 (Inverted pendulum) 系统、二连杆仿生机器人 Pendubot (Pendulum robot)、体操机器人 Acrobot (Acrobat robot)、与 2DTORA/TORA 系统。这些基准系统一方面常用于教学仪器与实验探究,另一方面也是进行非线性控制理论研究的良好平台。多年来,中外学者针对这些基准系统的数学模型、控制方法及控制目标都进行了成熟深入地研究。

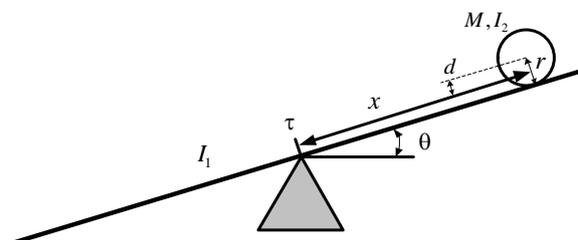
#### 1、球棒系统

常见的球棒系统如图 1-2 (b) 所示,由一根固定在支点上的旋转直棒和一个可在直棒上自由滚动的小球构成。球棒系统的控制目标有两种:(1) 驱动电机在支点处,小

球沿直棒自由移动；通过直接驱动直棒的旋转，实现小球位移达到目标点处<sup>[12]</sup>。(2) 驱动电机在小球内部，直棒绕支点自由旋转；通过直接驱动小球运动，实现直棒转角达到目标角度<sup>[13]</sup>。如图 1-2 (a) 所示，目前 Shorya<sup>[14]</sup>已经研究了运用平板取代直棒，控制实现小球复杂运动的二维球板系统。



(a) 球板系统实验平台



(b) 球棒系统

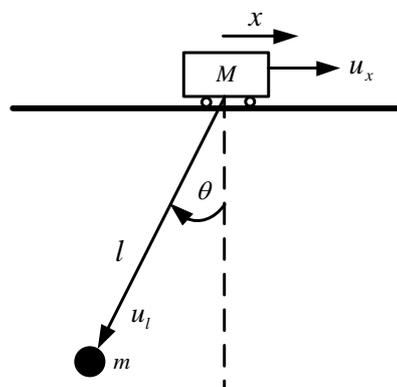
图 1-2 典型球摆系统

## 2、吊车系统

吊车系统由驱动的吊车和悬吊的负荷组成，通常吊车负重运动时，负荷运动时会与铅垂线存在一定夹角，吊车静止时，负荷由于惯性导致的摆动对系统是不利的。因此，吊车防摆问题也是欠驱动基准系统解决问题之一。一种常规的解决方案是 Burg 等人<sup>[15]</sup>采用状态变化将吊车系统转化为典型球棒系统，考虑伺服系统的饱和性的同时，运用球棒系统成熟的非线性控制器。另外，东南大学高丙团<sup>[6]</sup>与南开大学的孙宁<sup>[16]</sup>均研究过更为复杂的吊车系统以及多样的控制设计。



(a) 吊车系统实验平台



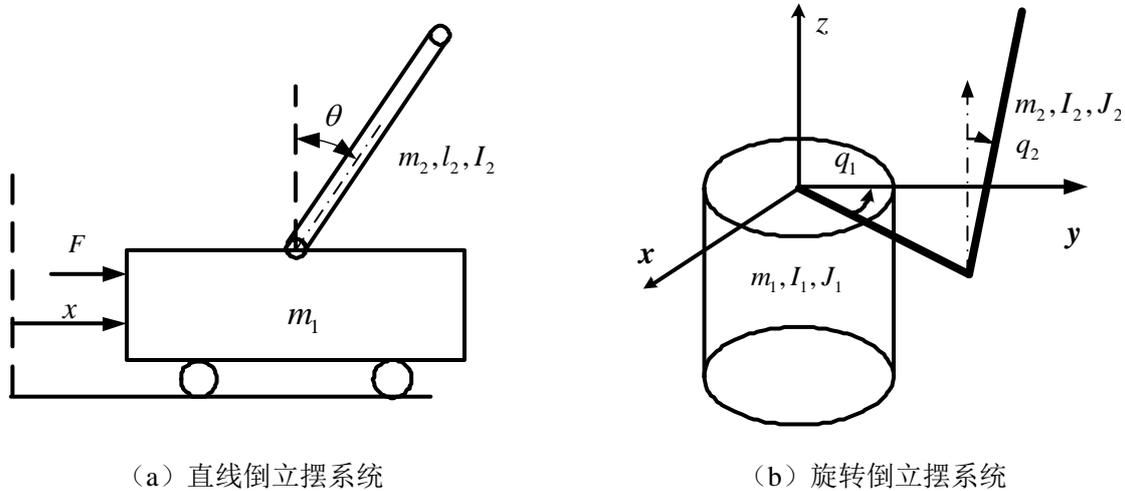
(b) 吊车系统

图 1-3 典型吊车系统

## 3、倒立摆系统

倒立摆系统是最广为人知的基准系统，因其物理分析简明、控制过程直观，且拓扑结构多样，通常分为一阶倒立摆系统<sup>[17-19]</sup>、二阶倒立摆系统<sup>[17]</sup>和高阶倒立摆系统。其中，最为常见同时也最重要的是一阶倒立摆系统，常见的两种形式为直线倒立摆和旋转摆系统。如图 1-4 (a) 所示，直线倒立摆系统也称为车摆系统<sup>[20]</sup>，因其物理控制模型应用于火箭系统直立稳定控制和高层楼宇的防摆抗震设计，在航空航天领域和建筑工程

方面都有重要的研究意义。旋转摆系统<sup>[21]</sup>由日本学者 Furuta 率先提出, 又被称为 Furuta 摆, 其结构如图 1-4 (b) 所示, 通过驱动质量为  $m_1$  的平面旋转臂, 实现未驱动的悬摆 (质量为  $m_2$ ) 倒立。一阶倒立摆系统的主要控制策略是先由一个控制器将摆杆从初始位置实现起摆, 然后切换另一线性控制器来确保摆杆的平衡<sup>[22-24]</sup>。

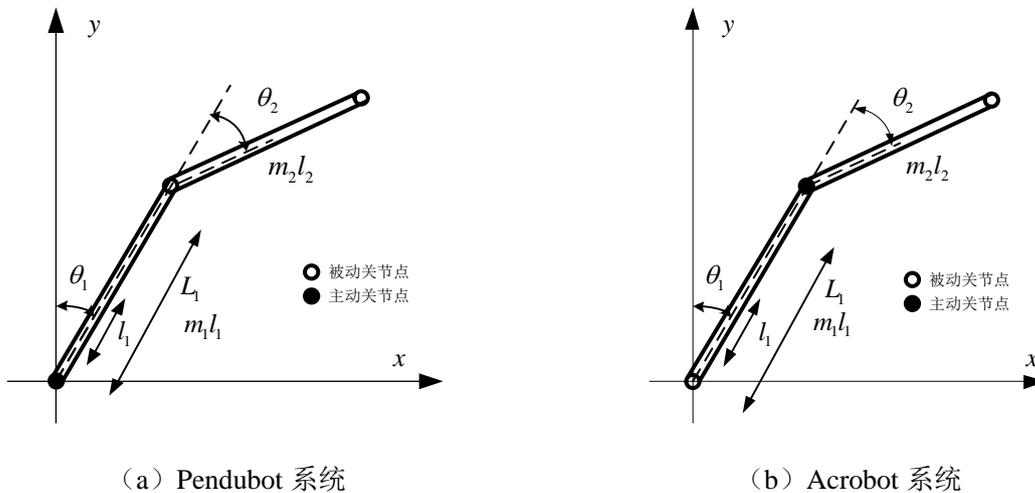


(a) 直线倒立摆系统

(b) 旋转倒立摆系统

图 1-4 一阶倒立摆系统

二阶倒立摆系统常以二连杆欠驱动机器臂的形式被探讨, 其实际概念源自仿生机器人模仿灵长类动物悬臂运动控制的研究, 所解决的控制问题是如何使灵长类机器人臂从一个确定的起始点摆动到给定的目标点。



(a) Pendubot 系统

(b) Acrobot 系统

图 1-5 二阶柔性机械臂系统

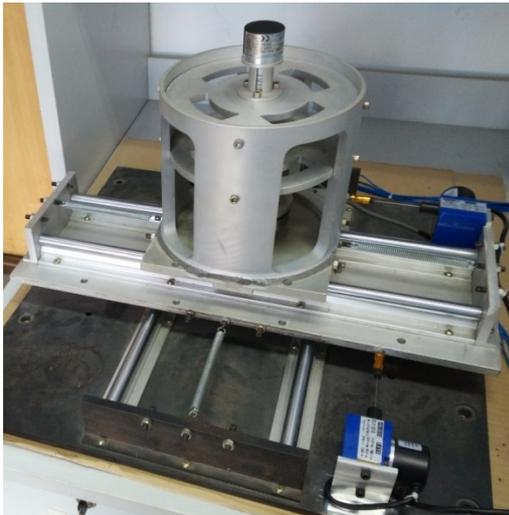
如图 1-5 (a) (b) 所示, Pendubot 和 Acrobot 是二连杆欠驱动机器臂的两种不同形式, 分别由两根连杆和一个电机组成, 具有两自由度和一个驱动输入; 不同的是, 前者驱动机电安装在机器臂的“肩部”, 后者驱动机电安装在机器臂的“肘部”。2000 年, Spong 等人<sup>[25]</sup>在研究 Pendubot 时采用系统能量的方法, 该方法随后也被成功运用在 Acrobot 控制<sup>[26, 27]</sup>。近年来, 东北大学夏德银博士<sup>[28]</sup>将基于神经网络的摩擦补偿因素考虑在内, 将基于能量法推广至 Pendubot<sup>[29, 30]</sup>实际起摆设计中, 取得良好效果。我国学者在 Acrobot 研究方面均有各自研究成果: 如访日学者 Xin xin 对 Acrobot 的起摆控制以及解决实验验证方面问题均有深入探讨<sup>[31, 32]</sup>; 哈尔滨工业大学的程红太博士针对 Acrobot

的虚拟约束方法的适应性控制以及动态伺服问题<sup>[4, 33-35]</sup>；中国地质大学（武汉）的赖旭芝教授针对 Acrobot 采用起摆控制<sup>[36]</sup>、智能控制<sup>[37]</sup>、倒转法稳定控制<sup>[38]</sup>等诸多控制方法展开了全面的研究。

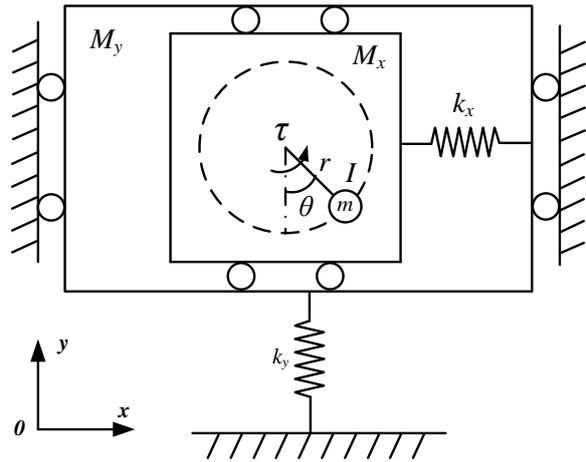
三阶及以上阶次的倒立摆系统因阶次越高，控制难度越大，北京工业大学余跃庆教授对其展开的实验研究尚处于试探和尝试的阶段<sup>[39]</sup>。

#### 4、（2D）TORA 系统

2DTORA（2-Dimensional Translational Oscillator with Rotational Actuator）系统由两个自由度直线运动的振荡小车和固定在上层小车上受驱动的旋转小球组成，如图 1-6 所示，最初由东南大学高丙团教授在 2009 年提出并深入研究<sup>[40, 41]</sup>。由于控制 2DTORA 系统中单一输入转矩实现振荡小车  $xy$  两轴向上的平衡点快速镇定，所需控制的状态变量较多，动态规律异常复杂，控制器的设计十分困难。因此，智能控制方案中较为简洁的模糊控制<sup>[41]</sup>、滑膜变结构控制<sup>[42]</sup>方案先后用于到 2DTORA 系统的稳定控制；其控制意义在于为摩天大楼在地震情况主动避震或风载荷作用下抑制楼体摆动提供一种新方法，同时也有助于研究高阶欠驱动系统控制问题。另外，2DTORA 系统中振荡小车运动由二维降至一维的特殊情况即为 TORA 系统。



(a) 2DTORA 系统装置



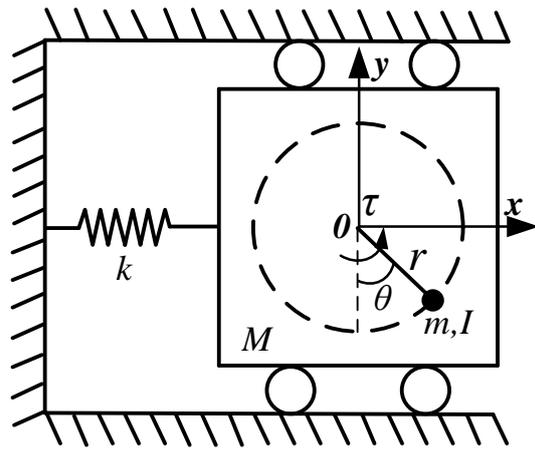
(b) 2DTORA 系统示意图

图 1-6 2DTORA 系统

本文将以 TORA 系统为研究对象。TORA 系统又常被称为 RTAC（Rotational Translational Actuator）系统，是一种控制单一旋转激励达到平移振荡的装置，通常情况下，由一个欠驱动平移振动小车和在小车上的驱动的偏心旋转小球组成。如图 1-7 所示，目前研究控制设计方面的文献中所指的 TORA 系统<sup>[43, 44]</sup>，是基于 Bupp 等人在研究非线性控制设计时提出并设计的欠驱动机械系统<sup>[45]</sup>，其物理意义源自研究双自旋航天器的共振俘获现象所提出的简化模型<sup>[46]</sup>。TORA 系统的控制机理与直线倒立摆系统相似，差别在于直线倒立摆系统是仅通过驱动平移小车从而间接控制倒立摆的旋转运动；TORA 系统是仅通过驱动旋转小球从而间接控制平移小车的平移运动。TORA 系统作为典型的非线性系统，为非线性控制策略的具体实施提供了精确的研究对象，在检验非线性控制器控制效果优劣方面具有直观的参考作用。



(a) TORA 系统装置



(b) TORA 系统示意图

图 1-7 TORA 系统

### 1.2.2 TORA 系统控制研究现状

欠驱动 TORA 系统的运动控制问题因控制方法种类繁多,且各自具有不同的特点,需要对其进行分类。根据控制目标的不同,欠驱动 TORA 系统的运动控制问题可分为两大类:(1)平衡点镇定控制问题;(2)动态轨迹跟踪控制问题。

对于欠驱动 TORA 系统而言,由于欠驱动自由度的平衡位置有限,系统的闭环平衡点或仅是系统位形空间的某个子集。欠驱动系统在特定位置仅存在有限的平衡点,目前学者们针对某些特殊位置(如水平位置、垂直位置)上平衡点的镇定控制,极大地限制了欠驱动 TORA 系统在实际应用范围。针对平衡点镇定控制问题的研究可追溯到上世纪九十年代,但动态轨迹跟踪控制是近年来才兴起的一个新的研究点。欠驱动 TORA 系统由于驱动缺失,系统能控性较弱,目标轨迹跟踪时总会存在动态过程,目标动态轨迹的合理设计关系到动态跟踪过程能否收敛,即欠驱动 TORA 系统仅可跟踪符合系统动力学模型特性的动态轨迹。

#### 1.2.2.1 平衡点镇定问题

针对非线性系统的控制,虽然欠驱动系统运动的分析、控制与镇定问题和完全驱动系统的此类振动问题都是传统的研究领域,但是 TORA 系统的平衡点控制的研究还是吸引了一些国内外研究学者的关注。

1996 年, Jankovic 等人在文献<sup>[47]</sup>中针对 TORA 系统已经设计出具有实现平衡点镇定控制效果的多级闭环控制器;同时, Burg 等人<sup>[48]</sup>采用仅有驱动小球角度作为反馈量的控制器,对其进行改进和补充设计。

2000 年, Jiang 等人<sup>[49]</sup>提出一种全输出反馈控制方案,并从数学分析的角度严谨地证明了 TORA 系统渐进稳定性。

2010 年, Petres 等人在文献<sup>[50]</sup>中设计了基于张量积分补偿法的状态反馈控制器,实现了初始点向平衡点快速振荡稳定,研究了 TORA 系统的控制设计中渐进性和复杂性的权衡问题。

2011 年, Fabio 提出了针对仅有驱动小球角度作为反馈量的控制器设计方案<sup>[51]</sup>,该方案可能更易于在实践中实现。另外,有学者将系统无源性纳入控制器设计中<sup>[52-54]</sup>,大

大简化了控制器设计步骤，实现角度项取代速度项作为反馈量的控制方案，相比于以往较为复杂的控制器，学者们也逐渐为关注实际控制操作过程是否较为简便，摩擦补偿问题也被深入探讨<sup>[55]</sup>。

2012年，Lee 等人在文献[56]中采用基于小波分析法的神经网络自适应反馈控制方案，考虑实际系统存在摩擦因素等不确定性的同时，改善了 TORA 系统受扰动后迅速恢复平衡状态的闭环控制性能。

国内针对欠驱动 TORA 系统的控制问题研究起步较晚，研究的学者也较少，但是都在欠驱动系统的控制研究上取得了一定的研究成果。其中代表性学者主要有东南大学的高丙团、中南大学的余锦华、中山大学的戴婉君等、浙江工业大学的武宪青。

2007年，东南大学高丙团教授将反步法（backstepping）应用到垂直位置上 TORA 系统的稳定控制中<sup>[57]</sup>，随后又在系统特性的基础上结合能量的方法<sup>[58]</sup>，设计的 TORA 系统的稳定控制器也取得了满意的控制效果。近年来，又从控制理论角度详细介绍了斜面 TORA 系统的广义动力学和可控性分析<sup>[59]</sup>；同时还扩大了 TORA 系统的平移振荡情况，即两维垂直的平移运动，并在文献[53]中提出了基于无源性的控制设计，用来将二维 TORA 系统稳定到其可控平衡点。

2011年中山大学杨智教授团队的许清媛设计的控制器也是基于能量法<sup>[60]</sup>，但能量函数法只针对平衡点取小球角位为零时有效；随后同团队的戴婉君设计一种具有控制参数的控制方法，这种控制方法可以使 TORA 系统平衡在任意设定的平衡点，实现了转角位移的跟踪<sup>[61]</sup>。

2012年，中南大学余锦华教授在文献[62]中，实施坐标变换以及分离系统线性非线性部分这两个设计环节，提出了针对 TORA 系统的等效输入扰动法，该方案在实现平衡点镇定控制器时仅须反馈位置状态量无须速度状态量。

2015年，浙江工业大学武宪青博士<sup>[43, 63, 64]</sup>根据 TORA 系统的动力学模型，分析旋转小球与平移振荡器之间的耦合关系和系统的无源特性，设计的自适应耦合控制器有较强的鲁棒性。

以上国内外文献中，所研究 TORA 系统主要控制目标均是将系统稳定到某一可控平衡点，且控制策略的设计已相对成熟；而在实现系统各自由度跟踪目标动态轨迹的控制，目前还鲜有人深入研究。

### 1.2.2.2 动态轨迹跟踪问题

动态轨迹跟踪广义地是指实现系统构形空间变量给定轨迹的动态跟踪；因轨迹周期性差异，可分为非周期性轨迹跟踪和周期性轨迹跟踪。其中，周期性轨迹跟踪常难于平衡点的镇定控制，在欠驱动系统周期性轨迹跟踪控制方面的研究与应用尚处于不成熟的阶段，学者们普遍针对某一类的欠驱动基准系统的动态轨迹规划<sup>[65, 66]</sup>和跟踪控制<sup>[67-69]</sup>方面展开研究。

早在 1995 年，对于周期性轨迹的跟踪控制，学者已经开始研究内部简单的欠驱动 Furuta 摆系统<sup>[70]</sup>；并对类 Furuta 摆系统，在研究状态变量和系统能量之间的关系后，

通过调整能量可产生一组周期性轨迹。

2005 年, 针对于在控制输入量少于系统自由度一个自由度的机械系统中, Shiriaev 等人提出了一个全面而又具有独创性的方法用以产生和镇定周期性轨迹的控制器<sup>[71]</sup>; 该主要思路是通过利用控制输入对原系统施加虚约束, 使原来复杂动力学模型可以蜕化为一个简单的虚拟有限维的系统, 使得该系统更容易进行分析和控制; 这种技术逐渐应用于车摆系统<sup>[71, 72]</sup>和 Furuta 摆系统<sup>[73, 74]</sup>等几个欠驱动基准系统中。

随后, 这种构造虚拟约束的方法应用在欠驱动体操机器人 (Acrobot) 上进展较为突出。在文献[75]中, 采用改进后的虚约束方法可通过系统状态空间的任意点产生周期性轨迹, 并实现系统状态空间由平衡点振荡到目标点或状态空间轨迹跟踪的控制目标。

本文继续了虚约束方法的推广, 基于虚约束的方法将被用于斜面 TORA 系统产生周期性轨迹, 提出一个基于控制 Lyapunov 函数的非线性控制策略。该控制策略可实现目标周期性轨迹的跟踪, 其结果是 TORA 系统在其状态空间将能周期性振荡到目标轨迹点。

本文也延续了系统总能量的方法, 并运用到欠驱动 TORA 系统的周期性轨迹控制; 从系统能量守恒和系统能量分配的角度, 设计合适的控制 Lyapunov 函数构造动态轨迹跟踪控制策略; 作为对比, 将与虚拟约束方法分别展开分析, 并相互验证控制有效性。

### 1.3 论文研究内容

本论文研究内容主要包括以下方面:

(1) 斜面 TORA 系统动力学模型与其动态轨迹。基于拉格朗日方程, 研究了适用于任意斜面的 TORA 系统的动力学描述; 深入分析了系统无源性、可控平衡点及平衡点能控性, 并验证了动力学特性的正确性。给出了周期性轨迹的定义, 分析了平衡点控制问题是周期性轨迹跟踪问题的子集, 重点分析了周期性轨迹的不同形式, 为 TORA 系统动态轨迹跟踪控制的研究奠定了基础。

(2) 基于虚约束法的 TORA 系统周期性轨迹跟踪控制。基于斜面 TORA 系统动力学, 为实现二维周期性轨迹, 通过人为构造 TORA 系统中旋转小球与平移小车间的虚拟约束条件, 带入 TORA 系统动力学中构建状态量关系, 简化了系统分析和动态轨迹控制。运用 Lyapunov 稳定理论, 设计了其状态空间目标点周期可达的轨迹跟踪控制策略, 并应用在三种不同斜面情况下的 TORA 系统, 验证了所设计控制策略控制有效性。

(3) 基于能量法的 TORA 系统周期性轨迹跟踪控制。对比于虚约束法控制策略的研究成果, 通过控制系统总能量守恒与分配关系, 分析了保守系统运动的周期性与总能量守恒属性, 对于 TORA 这类保守系统, 完整地给出了其非线性控制策略, 完成了周期性轨迹跟踪的系统化控制设计。对于同一目标周期性轨迹, 采用提出的基于系统能量的非线性控制器对比了基于虚约束的控制器的异同与优点, 验证了能量法控制策略的高效性。

(4) 搭建 TORA 系统装置与实验研究。为检验本文所提出控制器的实际控制效果, 搭建 TORA 系统装置平台, 对装置系统的摩擦建模及辨识, 运用前馈补偿方式, 基于摩擦补偿的能量法控制器再设计, 并在此实验平台上通过实验验证再设计的能量法控制器

的有效性。在数字仿真证明再设计的控制策略有效性的基础上，采用再设计的控制器实现了 TORA 系统装置一组给定的周期性轨迹的稳定控制，证明了控制方案的实用性。

综合以上四方面研究内容，本文针对 TORA 系统周期性轨迹的运动控制进行研究，通过少量的控制输入控制较多自由度的运动以达到和完全驱动系统相同的控制效果。通过构造基于不同机理的控制策略，在 Matlab/Simulink 仿真验证所提控制策略正确性的同时，在搭建的 TORA 系统物理平台进一步验证说明理论的完备性。另外，TORA 系统周期性轨迹跟踪控制策略在物理平台实现的进一步研究，也对探索新的欠驱动系统和研究实用的控制算法在节约资源和完善系统控制设计的方面具有重要意义。

论文的其余部分安排如下：

(1) 第二章建立适用于任意斜面的 TORA 系统动力学模型，基于系统特征分析其周期性轨迹；

(2) 第三章在斜面 TORA 系统动力学基础上，基于虚约束的方法在斜面 TORA 系统产生周期性轨迹，采用李亚普诺夫控制方案设计系统的轨迹跟踪控制器；

(3) 第四章基于系统能量的方法解决 TORA 系统的动态轨迹跟踪问题；设计控制李雅普诺夫函数，并从中得出控制器实现系统稳定跟踪。对比分析出能量方法的优越性；

(4) 第五章将进行 TORA 系统装置的搭建，通过对提出的控制策略编程翻译，实现 TORA 物理平台的周期性轨迹跟踪目标；另外，考虑系统摩擦因素，采用前馈摩擦补偿的方式，验证周期性轨迹跟踪的可行性；

(5) 第六章针对全文进行总结和展望，对全文研究内容进行归纳，对后续研究进行合理展望。

## 1.4 科研资助情况

课题的研究同时由国家自然科学基金委员会（资助编号：11102039），江苏省“六大人才”高峰计划（资助编号：2014-ZBZZ-001），东南大学优秀青年教师项目（资助编号：2242015R30024）共同资助。

## 第二章 动力学建模与动态轨迹

控制系统的分析、设计以及控制研究建立在正确的动力学模型的基础上。系统的动力学模型实际上是一组可反映系统在运动过程中控制输入量与各状态变量之间关系的微分方程组。本章建立了斜面 TORA 系统的动力学模型,分析了该动力学分析系统特性;设计了系统状态空间中两种不同形式的周期性轨迹,即同时实现平移小车和旋转小球周期性振荡的周期性轨迹,以及平移小车周期性运动、旋转小球保持定值的周期性轨迹。

### 2.1 拉格朗日方程

欠驱动系统动力学建立模型主要包括以下两种方法<sup>[76]</sup>:

(1) 基于经典牛顿力学与欧拉方程的分析法。基本思路由作用力间动态平衡性质,计算系统内部每个物理对象的加速度,并化简消去其内作用力。该方法适用于自由度较少且计算简便的简单系统;对自由度较多的高阶复杂系统,由于其庞大复杂的计算量,使得该方法难以迅速得到系统动力学模型。

(2) 基于分析力学范畴中的拉格朗日方程的分析法。拉格朗日方程基于系统的广义能量,系统动态的表达采用与系统广义坐标变量数目相等的广义坐标方程,在解决完整约束条件下的质点系动力学问题具有普遍意义。其表达式简洁明了,实际应用中仅计算系统动能和广义力,计算相对简便,因此本文采用此法用于复杂控制系统建模。

拉格朗日方程普遍形式为:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \quad (2-1)$$

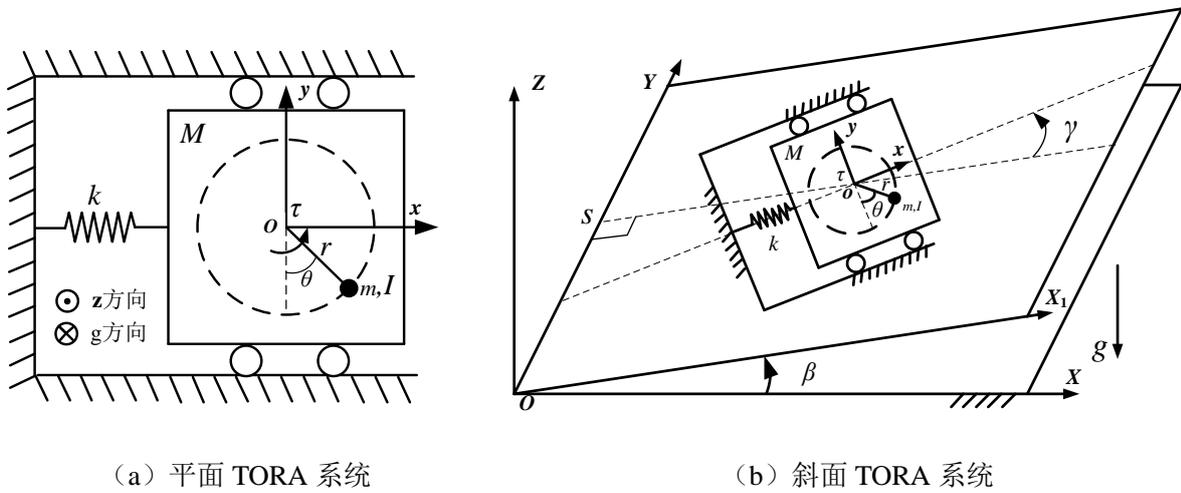
其中  $L$  表示拉格朗日算子,  $T$  表示质点系的总动能,  $P$  表示质点系的总势能,  $L = T - P$ , 物理意义为拉格朗日算子等于质点系的总动能与总势能之差。 $q_j$  表示质点系的广义坐标,  $j$  表示质点系的自由度,  $Q_j$  表示对应  $q_j$  非有势力的广义力。

### 2.2 TORA 动力学建模

针对 TORA 系统的动力学模型集中在水平面与垂直面情况下,而实际 TORA 系统由于安装或放置位置的固有误差,不能确保放置状态的绝对水平或垂直,也就意味着 TORA 系统的动力学始终处于斜面状态;因而建立斜面 TORA 系统动力学更具有实用性。如图 2-1 (a) 所示, TORA 系统本体由一个受电机直接驱动的旋转小球和一个无驱动的平移小车构成,质量为  $M$  的平移小车通过一根劲度系数为  $k$  的轻质弹簧与左侧墙壁相连并在  $x$  轴方向上做平移运动,平移小车的位移记为  $x$ ; 质量为  $m$  的匀质旋转小球在电机输入转矩为  $\tau$  的驱动下在平行于斜面的平面内旋转,旋转半径记为  $r$ , 旋转小球对其质心的转动惯量记为  $I$ , 逆时针转离  $y$  负半轴的转角记为  $\theta$ 。

对 TORA 系统建立  $oxyz$  坐标系,当弹簧是自然长度状态时,其坐标原点在平移小

车的中心。 $x$  轴沿平移小车的运动方向延伸， $z$  轴垂直于 TORA 系统所在的平面，其方向是垂直纸面向外。令  $g$  是重力常数，那么其方向是垂直纸面向内。将如图 2-1 (a) 所示的 TORA 系统放置于任意斜面，定义另一个坐标系  $OXYZ$ ，且其定义方式对应于  $oxyz$  坐标系。如图 2-1 (b) 所示，TORA 系统的运动发生在  $oxy$  斜平面上，相对于水平面  $OXY$  夹角为  $\beta$ ；TORA 系统中小车运动方向与斜面间夹角记作  $\gamma$ 。斜面的倾斜角度  $\beta$  是通过安装或装配过程中的不水平引起，记逆时针方向为正，这个角度可以被定义为  $\beta \in [0^\circ, 90^\circ]$ 。斜面上 TORA 系统的倾斜方向角度  $\gamma$  是可以任意选择，记逆时针方向为正，其中  $\gamma \in [0^\circ, 360^\circ)$ 。通过对比可以看到 TORA 系统位于水平面和斜面之间的差异，且当  $\beta = 0$  时，斜面 TORA 系统蜕变为平面 TORA 系统；位于斜面上 TORA 系统<sup>[58, 59]</sup>的动力学建模更具有一般性。



(a) 平面 TORA 系统

(b) 斜面 TORA 系统

图 2-1 TORA 系统

首先求取斜面 TORA 系统的总动能和总势能。旋转小球和平移小车均视为质点，坐标分别记为  $(x_1, y_1)$  与  $(x, 0)$ ，由图 2-1 (a) 中关系可得：

$$\begin{aligned} x_1 &= x + r \sin \theta \\ y_1 &= -r \cos \theta \end{aligned} \quad (2-2)$$

式(2-2)对时间  $t$  求导可得：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x} + \dot{\theta} r \cos \theta \\ \dot{y}_1 &= -\dot{\theta} r \sin \theta \end{aligned} \quad (2-3)$$

记  $T_{ball}$  与  $T_{cart}$  分别表示旋转小球与平移小车动能，由柯尼希定理得出：

$$\begin{aligned} T_{ball} &= \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \\ T_{cart} &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \end{aligned} \quad (2-4)$$

联立式(2-3)与式(2-4)可得到斜面 TORA 系统的总动能  $T$ ：

$$\begin{aligned} T &= T_{ball} + T_{cart} \\ &= \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + mr \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} + \frac{1}{2} (mr^2 + I) \dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (2-5)$$

如图 2-1 (b) 中弹簧自然长度下坐标原点  $o$  设为零势能点；且记  $P_{spring}$ 、 $P_{ball}$  与  $P_{cart}$  分别表示弹簧、旋转小球与平移小车的势能：

$$\begin{aligned} P_{spring} &= \frac{1}{2} kx^2 \\ P_{ball} &= mgr \sin(\gamma + \theta) \sin \beta \\ P_{cart} &= (M + m) gx \cos \gamma \sin \beta \end{aligned} \quad (2-6)$$

由式(2-6)可计算斜面 TORA 系统的总势能  $P$ ：

$$\begin{aligned} P &= P_{spring} + P_{ball} + P_{cart} \\ &= \frac{1}{2} kx^2 + (M + m) gx \cos \gamma \sin \beta + mgr \sin(\gamma + \theta) \sin \beta \end{aligned} \quad (2-7)$$

因此，拉格朗日算子  $L$  可表示为：

$$\begin{aligned} L &= T - P \\ &= \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + mr \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} + \frac{1}{2} (mr^2 + I) \dot{\theta}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} kx^2 - (M + m) gx \cos \gamma \sin \beta - mgr \sin(\gamma + \theta) \sin \beta \end{aligned} \quad (2-8)$$

通过选择  $(x, \theta) = (q_1, q_2)$  作为广义坐标， $\tau$  作为广义力，由式(2-1)可得斜面 TORA 系统的拉格朗日方程组：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= -N_x \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \tau - N_r \end{aligned} \quad (2-9)$$

其中  $N_x$  与  $N_r$  分别表示作用于平移运动小车和驱动旋转小球的扰动输入项。

由式(2-9)可得斜面 TORA 系统的动力学模型：

$$\begin{aligned} (M + m) \ddot{x} + mr \cos \theta \ddot{\theta} - mr \sin \theta \dot{\theta}^2 + kx + (M + m) g \cos \gamma \sin \beta + N_x &= 0 \\ mr \cos \theta \ddot{x} + (mr^2 + I) \ddot{\theta} + mgr \cos(\gamma + \theta) \sin \beta + N_r &= \tau \end{aligned} \quad (2-10)$$

将式(2-10)两个方程改写为矩阵形式：

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{N} = \mathbf{U} \quad (2-11)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M + m & mr \cos \theta \\ mr \cos \theta & mr^2 + I \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} kx + (M + m) g \cos \gamma \sin \beta \\ mgr \cos(\gamma + \theta) \sin \beta \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} 0 & -mr \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_r \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\mathbf{q} = (q_1, q_2)^T = (x, \theta)^T$  是可变向量； $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ ， $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ， $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ ， $\mathbf{N}$  与  $\mathbf{U}$  分别代表惯性矩阵、科氏力矩阵、离心力矩阵、干扰力矢量矩阵和斜面 TORA 系统的控制输入向量矩阵。

式(2-11)为完整的斜面 TORA 系统动力学模型矩阵形式。

## 2.3 TORA 动力学特性分析

为简化动力学模型(2-11)以及方便下文控制设计，本在理论分析时暂时忽略干扰力矢量矩阵  $\mathbf{N}$ ：

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{U} \quad (2-12)$$

其中各项表示情况与式(2-11)中对应项一致。易知，式(2-12)为理想情况下斜面 TORA 系统动力学模型。

从动力学方程(2-12)，我们可以明显地看到  $\theta$  为驱动变量而  $x$  是欠驱动变量。控制斜面 TORA 系统的结构变量  $x$  和  $\theta$ ， $\tau$  是其唯一的控制输入转矩。

当  $\beta = 0.5\pi$ ， $\gamma = 0.5\pi$  时，即是 TORA 系统位于垂直面上，TORA 系统的动力学模型(2-12)可变化为：

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + mr \cos \theta \ddot{\theta} - mr \sin \theta \dot{\theta}^2 + kx &= 0 \\ mr \cos \theta \ddot{x} + (mr^2 + I)\ddot{\theta} + mgr \sin \theta &= \tau \end{aligned} \quad (2-13)$$

方程组(2-13)就是垂直面标准 TORA 系统的动力学模型，且受重力项  $mgr \sin \theta$  影响。

当  $\beta = 0$ ， $\gamma$  为任意角度时，即是 TORA 系统位于水平面上，TORA 系统的动力学模型(2-12)可变化为：

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + mr \cos \theta \ddot{\theta} - mr \sin \theta \dot{\theta}^2 + kx &= 0 \\ mr \cos \theta \ddot{x} + (mr^2 + I)\ddot{\theta} &= \tau \end{aligned} \quad (2-14)$$

方程组(2-14)就是平面标准 TORA 系统的动力学模型。相比于方程组(2-13)可以明显的发现，平面 TORA 系统不受重力因素的影响。

### 2.3.1 动力学特征

式(2-11)所描述的斜面 TORA 动力学方程中  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  为对称矩阵，且其秩  $\det(\mathbf{M})$  为：

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{M}) &= (M+m)(mr^2 + I) - (mr \cos \theta)^2 \\ &= (M+m)I + Mmr^2 + m^2 r^2 \sin^2 \theta > 0 \end{aligned} \quad (2-15)$$

因此  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  对于  $\mathbf{q}$  中所由有元素是正定对称矩阵。另外，根据式(2-12)中  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  和  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  的表达式可求得：

$$\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & mr \sin \theta \dot{\theta} \\ -mr \sin \theta \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

易知  $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  是斜对称矩阵，并且由此得到以下重要特征：

$$\mathbf{p}^T (\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \mathbf{p} = 0 \quad \forall \mathbf{p} \quad (2-17)$$

该特征将在式(2-21)中证明斜面 TORA 系统的无源性<sup>[77]</sup>。

由式(2-7)可得到斜面 TORA 系统的总势能  $P$  与离心力矩阵  $\mathbf{G}(\mathbf{q})$  间的关系为：

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \frac{\partial P}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} kx + (M+m)g \cos \gamma \sin \beta \\ mgr \cos(\gamma + \theta) \sin \beta \end{bmatrix} \quad (2-18)$$

斜面 TORA 系统的总能量  $E$  :

$$\begin{aligned} E &= T + P \\ &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + mr \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} + \frac{1}{2}(mr^2 + I)\dot{\theta}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}kx^2 + (M+m)gx \cos \gamma \sin \beta + mgr \sin(\gamma + \theta) \sin \beta \end{aligned} \quad (2-19)$$

式(2-19)可写为矩阵形式:

$$E = T + P = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + P \quad (2-20)$$

根据式(2-12)及式(2-17)(2-18)结论, 式(2-20)关于时间  $t$  求导得到:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + 0.5 \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{G}(\mathbf{q}) \\ &= \dot{\mathbf{q}}^T (-\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{U} + 0.5 \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{G}(\mathbf{q}) \\ &= 0.5 \dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{U} - \mathbf{G}(\mathbf{q})) + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{G}(\mathbf{q}) \\ &= \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{U} = \dot{\theta} \tau \end{aligned} \quad (2-21)$$

对式(2-21)两边取积分:

$$\int_0^t \dot{\theta}(\tau) \tau d\tau = E(t) - E(0) \geq -E(0) \quad (2-22)$$

因此以  $\tau$  为输入和  $\dot{\theta}$  为输出的系统是无源的<sup>[58]</sup>。

### 2.3.2 平衡点分析

一般地, 系统平衡点由状态方程  $\dot{x} = f(x, u)$  解得。对于系统开环平衡点, 令  $u = 0$ , 即  $\dot{x} = f(x, 0) = 0$ , 对于系统闭环平衡点, 令  $\dot{x} = f(x, u) = 0$ 。

对于理想斜面 TORA 系统动力学模型(2-12), 计算可获得斜面 TORA 系统的闭环平衡点。令  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T$  且  $u = \tau$ , 系统动力学模型(2-12)可写成一般仿射形式:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u \quad (2-23)$$

其中

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2(x) \\ x_4 \\ f_4(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{f_2}{\det(\mathbf{M})} \\ x_4 \\ \frac{f_4}{\det(\mathbf{M})} \end{bmatrix} \quad g(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(x) \\ 0 \\ g_4(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-b \cos x_3}{\det(\mathbf{M})} \\ 0 \\ \frac{m_{11}}{\det(\mathbf{M})} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 f_2 &= (b \sin x_3 x_4^2 - kx_1 - m_{11}g \cos \gamma \sin \beta) m_{22} + b^2 g \cos x_3 \cos(\gamma + x_3) \sin \beta \\
 f_4 &= -b \cos x_3 (b \sin x_3 x_4^2 - kx_1 - m_{11}g \cos \gamma \sin \beta) - m_{11}bg \cos(\gamma + x_3) \sin \beta \\
 m_{11} &= M + m \quad b = mr \quad m_{22} = mr^2 + I
 \end{aligned}$$

令仿射系统(2-23)中  $\dot{\mathbf{x}} = 0$  且  $\tau = 0$ ，由于  $\det(\mathbf{M}) > 0$ ，则  $x_2 = x_4 = 0$  且  $f_2 = f_4 = 0$ ，其具体表达式：

$$(-kx_1 - m_{11}g \cos \gamma \sin \beta) m_{22} + b^2 g \cos x_3 \cos(\gamma + x_3) \sin \beta = 0 \quad (2-24)$$

$$-b \cos x_3 (-kx_1 - m_{11}g \cos \gamma \sin \beta) - m_{11}bg \cos(\gamma + x_3) \sin \beta = 0 \quad (2-25)$$

由于参数  $k$ ， $m_{11}$ ， $b$ ， $m_{22}$ ， $g$  均为正数，式(2-24)与(2-25)可简化为：

$$\det(\mathbf{M})bg \cos(\gamma + x_3) \sin \beta = 0 \quad (2-26)$$

由于  $\det(\mathbf{M}) > 0$ ，当斜面倾角  $\beta = 0$  时，式(2-26)中就无法求得旋转小球平衡角度  $\theta_e$ ，也就是说， $x_3$  可为任意角度；当斜面倾角  $\beta \in (0, 90^\circ]$  时， $x_3$  的平衡点可计算得到：

$$x_3 = \theta_e = (n+0.5)\pi - \gamma \quad (2-27)$$

于是旋转小球的平衡点可表示为：

$$x_3 = \theta_e = \begin{cases} \forall & \beta = 0^\circ \\ (n+0.5)\pi - \gamma & 0^\circ < \beta \leq 90^\circ \end{cases} \quad (2-28)$$

将式(2-26)代入式(2-24)中可得平移小车的平衡位置：

$$x_1 = x_e = -\frac{(M+m)g}{k} \cos \gamma \sin \beta \quad (2-29)$$

综合考虑式(2-28)与式(2-29)，斜面 TORA 系统的可控平衡点为：

$$\mathbf{x}_e = \left[ -\frac{(M+m)g}{k} \cos \gamma \sin \beta, \quad 0, \quad (n+0.5)\pi - \gamma, \quad 0 \right] \quad (2-30)$$

当  $\beta = 0$  时，斜面 TORA 系统不受重力因素影响，式(2-30)中可控平衡点相对稳定。但是当斜面倾角  $\beta \in (0, 90^\circ]$  时，斜面 TORA 系统受重力影响，系统本身为类摆系统，存在二种平衡点。

一种是具有高势能的上平衡点：

$$\mathbf{x}_{e\_up} = \left[ -\frac{(M+m)g}{k} \cos \gamma \sin \beta, \quad 0, \quad (2n+0.5)\pi - \gamma, \quad 0 \right] \quad (2-31)$$

其中高重力势能大小为  $-0.5(M+m)^2 g^2 \cos^2 \gamma \sin^2 \beta + mgr \sin \beta$ 。

一种是具有低势能的下平衡点：

$$\mathbf{x}_{e\_down} = \left[ -\frac{(M+m)g}{k} \cos \gamma \sin \beta, \quad 0, \quad (2n+1.5)\pi - \gamma, \quad 0 \right] \quad (2-32)$$

其中低重力势能大小为  $-0.5(M+m)^2 g^2 \cos^2 \gamma \sin^2 \beta - mgr \sin \beta$ ，式(2-28)(2-30)(2-31)(2-32)中  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

## 2.3.3 能控性分析

为了分析系统平衡点的可控性，其判据为式(2-33)矩阵是否满秩：

$$\mathbf{C} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^3\mathbf{B}] \quad (2-33)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_4} \end{bmatrix}_{x=x_e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-b \cos x_3}{\det(\mathbf{M})} \\ 0 \\ \frac{a}{\det(\mathbf{M})} \end{bmatrix}_{x=x_e} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

由式(2-33)计算  $\mathbf{C}$  可得到：

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & b_2 & 0 & a_{21}b_2 + a_{23}b_4 \\ b_2 & 0 & a_{21}b_2 + a_{23}b_4 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & a_{41}b_2 + a_{43}b_4 \\ b_4 & 0 & a_{41}b_2 + a_{43}b_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-34)$$

其中

$$a_{21} = -\frac{m_{22}k}{\det(\mathbf{M})} \quad a_{23} = -\frac{b^2 g \sin(2\theta_e + \gamma) \sin \beta}{\det(\mathbf{M})} \quad a_{41} = \frac{bk \cos \theta_e}{\det(\mathbf{M})}$$

$$a_{43} = \frac{m_{11}bg \cos \theta_e \sin \gamma \sin \beta}{\det(\mathbf{M})} \quad b_2 = -\frac{b \cos \theta_e}{\det(\mathbf{M})} \quad b_4 = \frac{m_{11}}{\det(\mathbf{M})}$$

计算矩阵  $\mathbf{C}$  的秩：

$$\det(\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} b_2 & a_{21}b_2 + a_{23}b_4 & 0 & 0 \\ b_4 & a_{41}b_2 + a_{43}b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_{21}b_2 + a_{23}b_4 \\ 0 & 0 & b_4 & a_{41}b_2 + a_{43}b_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{C}'_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{C}'_{2 \times 2} \end{vmatrix} \quad (2-35)$$

由式(2-35)知，可通过计算  $\det(\mathbf{C}') \neq 0$  得出矩阵  $\mathbf{C}$  满秩条件：

$$\det(\mathbf{C}') = \frac{b \cos \theta_e}{[\det(\mathbf{M})]^3} \times \left[ -k(m_{11}m_{22} - b^2 \cos^2 \theta_e) + m_{11}^2 bg \sin \theta_e \cos \gamma \sin \beta \right] \quad (2-36)$$

以下分别以水平面、上平衡点和下平衡点三种情况分析讨论，分别可得出能控性矩阵  $\mathbf{C}$  满秩条件。

### (1) 水平面情况

当  $\beta = 0$  即 TORA 系统在水平面时, 将式(2-23)中  $m_{11}, b, m_{22}$  参数带入式(2-36)可得:

$$\det(\mathbf{C}') = -\frac{mrk \cos \theta_e}{[\det(\mathbf{M})]^2} \quad (2-37)$$

其中  $m, r, k, \det(\mathbf{M})$  均为正数, 因此矩阵  $\mathbf{C}'$  (或  $\mathbf{C}$ ) 满秩条件为  $\cos \theta_e \neq 0$ , 即:

$$\theta_e = (n + 0.5)\pi \quad (2-38)$$

其中  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。由式(2-38)可知, 旋转小球转角  $\theta$  收敛到与平移小车振荡方向相平行的角度时, 此时平衡点是不可控的。

### (2) 上平衡点情况

当  $0 < \beta \leq 90^\circ$  且  $\theta_e = (2n + 0.5)\pi - \gamma$  时, 即取式(2-31)所示斜面 TORA 系统上平衡点代入式(2-36)可得:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{C}') &= \frac{mr \cos \theta_e}{[\det(\mathbf{M})]^3} \times \left[ -k \det(\mathbf{M}) + (M + m)^2 mrg \sin^2 \theta_e \sin \beta \right] \\ &= \frac{mr \sin \gamma}{[\det(\mathbf{M})]^3} \times \left[ -k \det(\mathbf{M}) + (M + m)^2 mrg \cos^2 \gamma \sin \beta \right] \end{aligned} \quad (2-39)$$

因此对于斜面 TORA 系统上平衡点, 其可控性条件为:

$$\sin \gamma \neq 0 \quad (2-40)$$

$$\left[ (M + m)^2 mrg \sin \beta - m^2 r^2 k \right] \cos^2 \gamma \neq k(MI + mI + Mmr^2) \quad (2-41)$$

### (3) 下平衡点情况

当  $0 < \beta \leq 90^\circ$  且  $\theta_e = (2n + 1.5)\pi - \gamma$  时, 即取式(2-32)所示斜面 TORA 系统下平衡点代入式(2-36)可得:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{C}') &= \frac{-mr \cos \theta_e}{[\det(\mathbf{M})]^3} \times \left[ k \det(\mathbf{M}) + (M + m)^2 mrg \sin^2 \theta_e \sin \beta \right] \\ &= \frac{mr \sin \gamma}{[\det(\mathbf{M})]^3} \times \left[ k \det(\mathbf{M}) + (M + m)^2 mrg \cos^2 \gamma \sin \beta \right] \end{aligned} \quad (2-42)$$

其中  $M, m, r, k, \det(\mathbf{M}), \sin \beta$  均为正数。因此对于斜面 TORA 系统下平衡点, 其可控性条件为:

$$\gamma \neq n\pi \quad (2-43)$$

其中  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

根据式(2-32)中  $\theta$  与  $\gamma$  的关系, 对于对于斜面 TORA 系统下平衡点, 可控性条件(2-43)依然表明旋转小球转角  $\theta$  收敛到与平移小车振荡方向相平行的角度时, 平衡点不可控。

比较 (2) (3) 情况下斜面 TORA 系统的不同平衡点的可控性条件, 发现式(2-40)与式(2-43)是一致的。为了满足上平衡点的可控条件式(2-41), 当斜面角度  $\beta, \gamma$  固定时, 选择合适的物理参数即可实现。

根据可控平衡点的能控性分析,平面(或斜面)TORA 系统可控性条件可根据式(2-10)中下半部分解释:输入转矩  $\tau$  通过含  $\cos\theta$  的耦合系数间接控制平移小车的加速度项  $\ddot{x}$ 。若令  $\theta_e = (n+0.5)\pi$ , 旋转小球转角  $\theta$  可通过简单控制达到  $(n+0.5)\pi$ , 然而此时  $\cos\theta = 0$ , 也就意味着由输入转矩间接控制平移小车运动的耦合系数不起作用。即当旋转小球转角  $\theta = (n+0.5)\pi$  时, 输入转矩  $\tau$  对平移小车失控。因此, 在周期性轨迹设计过程中, 若旋转小球目标转角设定为平行于小车位移  $x$  方向, 当旋转小球最终镇定在目标转角位置时, TORA 系统的欠驱动控制失效。

### 2.3.4 仿真验证

为了验证式(2-11)动力学及特性的正确性, 利用 Matlab/Simulink 建立斜面 TORA 系统模型。仿真涉及到的物理参数如表 2-1 所示。

表 2-1 斜面 TORA 系统的物理参数表

参数	数值	单位	注释
$M$	5.2	kg	平移小车质量
$m$	0.3	kg	旋转小球质量
$k$	1428	N/m	弹簧劲度系数
$r$	0.0695	m	旋转小球的偏心距
$I$	$1.503 \times 10^{-3}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	旋转小球的转动惯量
$g$	9.81	N/kg	重力常数

系统初始状态  $(x_0, \dot{x}_0, \theta_0, \dot{\theta}_0) = (0, 0, 0, 0)$ , 控制输入转矩  $\tau = 0$ , 斜面倾角为  $\beta = 0.25\pi$ ,  $\gamma = 0.25\pi$ 。为了更清晰地证明系统平衡点以及对比有无摩擦因素下的系统动力学特性, 取式(2-11)中干扰力矢量矩阵  $\mathbf{N}$  为:

$$\begin{aligned} N_x &= k_{fx} \cdot \dot{x} \\ N_r &= k_{fr} \cdot \dot{\theta} \end{aligned} \quad (2-44)$$

其中  $k_{fx}$ 、 $k_{fr}$  为摩擦系数分别取  $k_{fx} = 0.5$ ,  $k_{fr} = 0.05$ 。仿真结果如图 2-2 所示, 图中左栏为无摩擦情况; 右栏为有摩擦情况。

由图 2-2 左栏表明, 对于斜面无摩擦因素的 TORA 系统, 平移小车沿着  $x$  轴方向振荡且振荡中心为平衡点  $x_e$ 。另外, 由于系统总能量守恒, 平移小车振幅互补。旋转小球转角  $\theta$  曲线则没有明显的规律, 其初始状态决定其存在整圈旋转或单圈内局部振荡的现象。由图 2-2 右栏表明, 当考虑 TORA 系统摩擦因素时, 平移小车位移关于其平衡点  $x_e = -0.0189\text{m}$  做阻尼振荡; 同时, 旋转小球转角  $\theta$  在摩擦作用下摆角逐渐减小最终镇定在平衡点  $\theta_e = -2.35\text{rad}$ 。系统输入转矩  $\tau = 0$  表明无摩擦情况下, 平移小车绕其平衡点振荡且旋转小球转角没有明显规律; 有摩擦情况下, 平移小车与旋转小球均绕其平衡点阻尼振荡, 较长时间后静止在平衡点处。

数字仿真结果与物理状态相符, 虽该仿真不是证明 TORA 系统动力学模型正确性的充要条件, 但在某种程度上可校验先前分析的正确性。

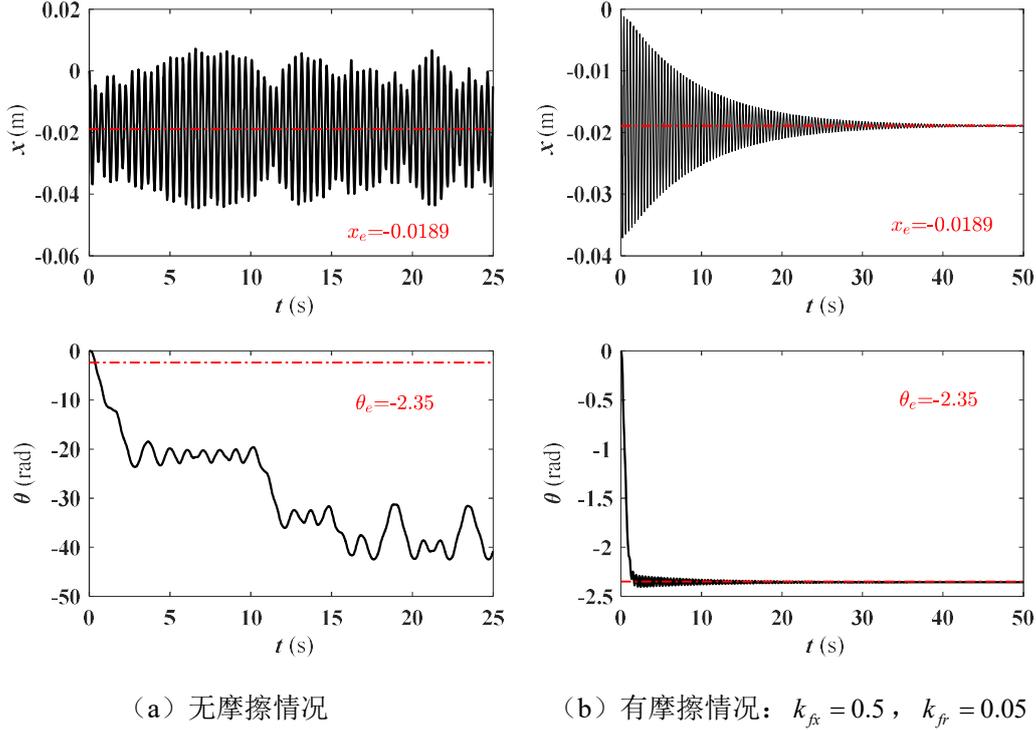


图 2-2 TORA 动力学验证仿真:  $(x_0, \dot{x}_0, \theta_0, \dot{\theta}_0) = (0, 0, 0, 0)$ ,  $\tau = 0$ ,  $\beta = 0.25\pi$ ,  $\gamma = 0.25\pi$

## 2.4 动态轨迹

斜面 TORA 系统动态轨迹是指系统自由度跟踪并稳定到状态空间的某一组轨迹,即极限环动态稳定。本文研究斜面 TORA 系统的动态轨迹跟踪问题,其控制目标不是非周期性的动态轨迹,而是周期性轨迹的准确跟踪。

### 2.4.1 定义

对于系统

$$\dot{x} = f(x, u), x(t_0) = x_0$$

在激励  $u(t)$  作用下,对于自由度范围内任意目标周期性轨迹向量  $\bar{\beta}_d(t)$  及允许误差  $\delta$ ,其中  $\delta = [\delta_x, \delta_\theta]^T$  为有界常数数组,系统状态空间  $\mathbf{x}(t) = [x(t), \theta(t)]^T$ ,系统目标周期性轨迹  $\bar{\beta}_d(t) = [\bar{x}_d(t), \bar{\theta}_d(t)]^T$ ,  $T$  为时间周期。

若  $\exists t_0$ , 使得  $t \geq t_0$  时  $|\mathbf{x}(t) - \bar{\beta}_d(t)| < \delta$  成立,则称该运动为动态轨迹跟踪;

若  $\exists t_0$ , 使得  $t \geq t_0$  时  $|\mathbf{x}(t) - \bar{\beta}_d(t)| < \delta$  成立,且  $\bar{\beta}_d(t) = \bar{\beta}_d(t+T)$ ,则称该运动为周期性轨迹跟踪;

动态轨迹跟踪的实质是系统状态在某时刻后连续地跟踪一组给定轨迹,当该组给定轨迹具有周期性,则动态轨迹跟踪称为周期性轨迹跟踪。在斜面 TORA 系统中,输入转矩  $\tau$  对于旋转小球转角  $\theta$  是直接驱动,使得旋转小球完成周期性轨迹跟踪显然可行;对于平移小车位移  $x$  是欠驱动,使得平移小车完成周期性轨迹跟踪这一控制目标充满挑战。

### 2.4.2 周期性轨迹与平衡点关系

TORA 系统周期性轨迹跟踪与平衡点镇定控制属于欠驱动系统稳定问题的两个方面，平衡点镇定控制着重于系统各自由度从非平衡点处渐近稳定在系统平衡点处，其中系统平衡点由系统初始条件以及所处环境决定。然而系统的周期性轨迹跟踪控制则着重于系统各自由度由起始点渐近跟踪到给定的动态轨迹；在系统固有频率前提下，动态轨迹具有周期性。

特别地，当目标周期性轨迹

$$\bar{\beta}_d(t) = [\bar{x}_d(t), \bar{\theta}_d(t)]^T = [x_e, \text{const.}]^T$$

TORA 系统的周期性轨迹跟踪控制问题蜕化为平衡点镇定控制问题；其中， $x_e$  表示 TORA 系统中平移小车的平衡位置， $\text{const.}$  表示常数。一般地，平衡点控制问题是周期性轨迹控制问题的一种特殊情况。

### 2.4.3 周期性轨迹形式

根据目标周期性轨迹  $\bar{\beta}_d(t)$  中的跟踪系统自由度维数的不同，TORA 系统周期性轨迹设计为两种形式：（1）二维周期性轨迹；（2）一维周期性轨迹。

二维周期性轨迹是指 TORA 系统中同时实现平移小车和旋转小球周期性振荡的周期性轨迹，即

$$\bar{\beta}_d(t) = [\bar{x}_d(t), \bar{\theta}_d(t)]^T = [\bar{x}_d(t+T), \bar{\theta}_d(t+T)]^T$$

斜面 TORA 系统目标周期性轨迹上的目标点  $(x_d, \theta_d)$  是平移小车和旋转小球仅在某些周期性时刻才能达到的位置；若直接设计系统自由度的周期性轨迹的目标点  $(x_d, \theta_d)$ ，目标点的周期性稳定达到即确定了目标周期性轨迹  $\bar{\beta}_d(t)$  的动态追踪，间接设计了目标周期性轨迹  $\bar{\beta}_d(t)$ 。

一维周期性轨迹是指 TORA 系统中平移小车周期性运动、旋转小球保持定值的周期性轨迹，即

$$\bar{\beta}_d(t) = [\bar{x}_d(t), \theta_d]^T = [\bar{x}_d(t+T), (n\pi + \alpha)]^T$$

本文所提的一维周期性轨迹跟踪基于系统动态运动过程中，仅关注平移小车的目标周期性轨迹  $\bar{x}_d(t)$  是否跟踪，希望旋转小球静止在目标角度  $(n\pi + \alpha)$  的情况。由于旋转小球达到目标角度时与平移小车相对静止，具有与平移小车相同的周期性。记  $x_A$  表示平移小车周期性轨迹  $\bar{x}_d(t)$  的振幅， $\alpha$  表示旋转小球平衡点的幅角，则一维周期性轨迹跟踪控制中给定的目标点可表示为  $(x_A, \alpha)$ 。

#### （1）二维周期性轨迹跟踪

对一般斜面情况下的 TORA 系统，若给定目标点  $(x_d, \theta_d)$ ，其二维周期性轨迹跟踪控制的动态过程如图 2-3 所示。

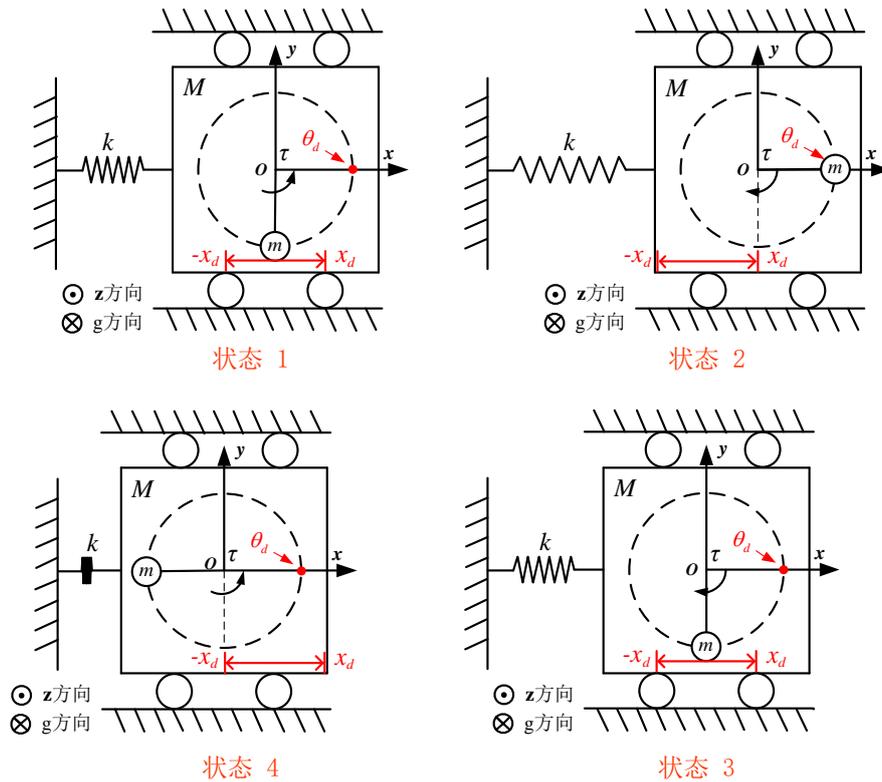


图 2-3 二维周期性轨迹跟踪动态过程图

图 2-3 状态 1 所示 TORA 系统处于初始状态,且给定平移小车与旋转小球的目标点分别为  $x_d$  与  $\theta_d$ , 在输入转矩  $\tau$  作用下, 系统逐渐达到状态 2, 此时平移小车与旋转小球同时达到各自的目标点; 输入转矩  $\tau$  反向作用旋转小球, 同时平移小车运动轨迹反向, 系统逐渐经过状态 3, 达到状态 4。下一时刻, 平移小车与旋转小球周期地按状态 2-状态 3-状态 4-状态 2 循环运动。由于目标点可确定目标周期性轨迹, 若确定目标周期性轨迹的唯一性, 即确定系统二维实现目标周期性轨迹跟踪控制。

易知所述的二维周期性轨迹跟踪即实现 TORA 系统中平移小车和旋转小球的目标周期性轨迹跟踪, 具体表现为平移小车位移  $x$  可周期性地达到目标周期性轨迹的振幅点, 旋转小球转角  $\theta$  可周期性地达到目标周期性轨迹  $\bar{\theta}_d(t)$ 。

### (2) 一维周期性轨迹跟踪

对于 TORA 系统的一维周期性轨迹跟踪控制, 若给定目标点  $(x_A, \alpha)$ , 其一维周期性轨迹跟踪的动态过程如图 2-4 所示。

图 2-4 状态 1 所示 TORA 系统处于初始状态, 且给定平移小车目标周期性轨迹振幅  $x_A$  与旋转小球的目标幅角  $\alpha$ , 在输入转矩  $\tau$  作用下, 达到状态 2, 此时由于  $x$  轴向冲量守恒, 平移小车位移  $x$  沿负方向运动; 随着旋转小球转角  $\theta$  越过  $\pi$  位置, 系统达到状态 3, 平移小车位移  $x$  在正冲量作用下沿正方向运动, 加大了平移小车跟踪目标周期性轨迹的速度; 经过若干次状态 2-状态 3 后, 系统达到状态 4, 此时平移小车与旋转小球均达到各自目标周期性轨迹, 旋转小球在输入转矩作用下保持相对静止, 与平移小车同周期运动; 最终系统在状态 5-状态 6-状态 4 间循环运动。由于平移小车跟踪到振幅的为  $x_d$  动态轨迹, 旋转小球最终稳定在相对于平移小车静止的某一角度  $\theta_d$ , 因旋转小球与平移

小车最终相对静止，旋转小球的动态轨迹与平移小车动态轨迹同周期。

易知所述的一维周期性轨迹跟踪即实现 TORA 系统中平移小车的目标周期性轨迹跟踪，具体表现为平移小车位移  $x$  可渐近跟踪目标周期性轨迹  $\bar{x}_d(t)$ ，旋转小球转角  $\theta$  镇定在目标角度  $(n\pi + \alpha)$ 。

由定义知，TORA 系统中一维周期性轨迹跟踪误差变化有界，定义最大跟踪误差为：

$$\sup e(t) = \max_{t \in [0, t_f]} |x(t) - \bar{\beta}_d(t)| \quad (2-45)$$

则其界则为  $\sup e(t)$ ，分别记做  $\sup e_x(t)$  与  $\sup e_\theta(t)$ 。易知系统自由度  $\theta$  和  $x$  分别受输入转矩  $\tau$  的直接和间接驱动作用，动态轨迹误差收敛到允许范围存在时间差。另外，不同自由度由初始状态进入目标周期性轨迹时，还存在初相角  $\varphi$ 。

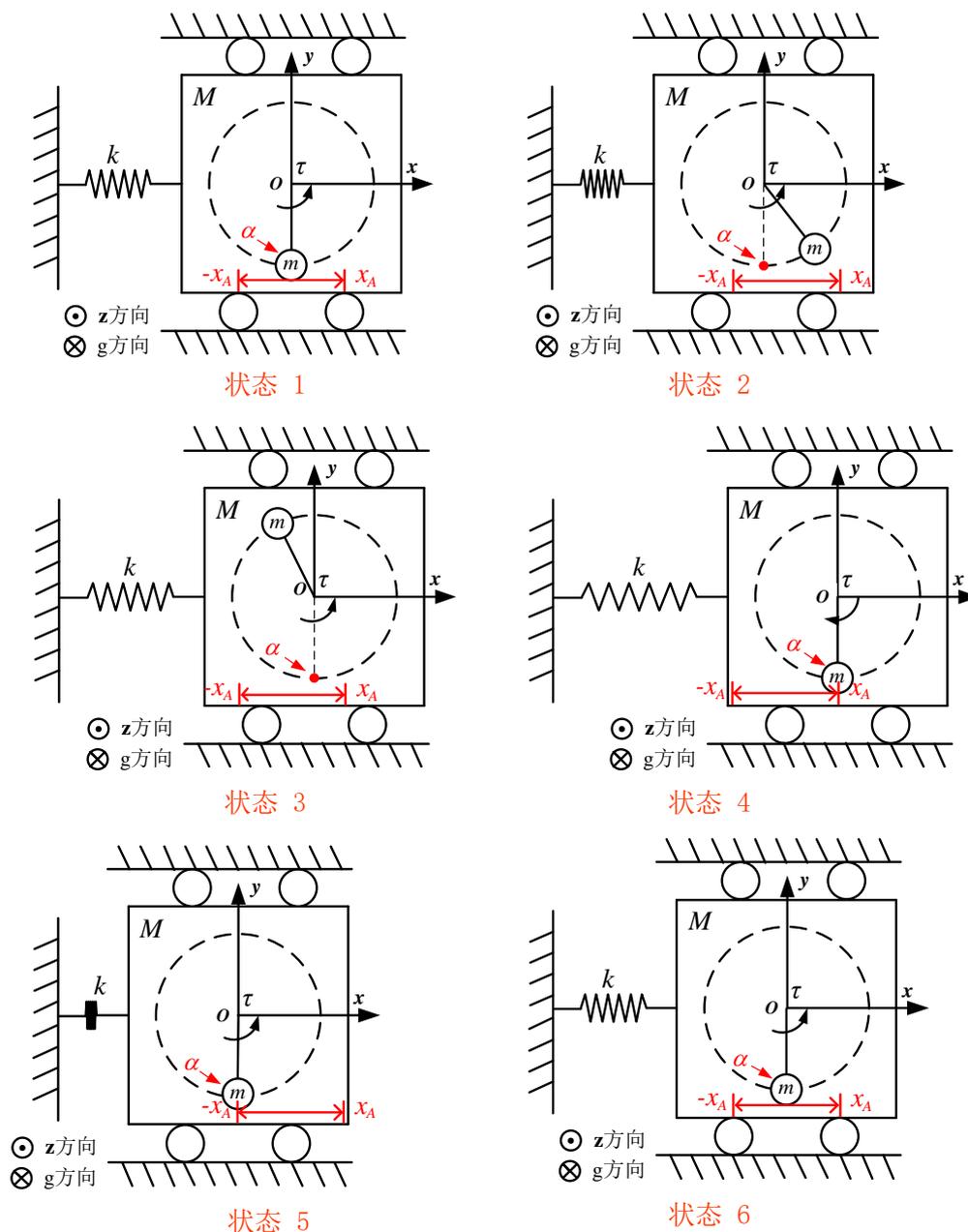


图 2-4 一维周期性轨迹跟踪动态过程图

考虑到欠驱动 TORA 系统在旋转小球自由度缺失时，即  $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ ， $\tau = 0$ ，蜕化为

弹簧-振子系统，对弹簧-振子系统在  $x$  轴向上由牛顿第二定律显然有：

$$-kx - (M + m)g \cos \gamma \sin \beta - N_x = (M + m)\ddot{x} \quad (2-46)$$

化简式(2-46)得到：

$$\ddot{x} + \frac{k}{M + m}x + g \cos \gamma \sin \beta + \frac{N_x}{M + m} = 0 \quad (2-47)$$

其对应的特征方程根为  $r_{1,2} = \pm j\sqrt{k/(M + m)}$ 。

式(2-47)方程通解为：

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t = C \sin(\omega t + \varphi) \quad (2-48)$$

其中  $\omega = \sqrt{k/(M + m)}$ ， $C_1$ ， $C_2$ ， $C$  为常数， $\varphi$  为初相角。另外，式(2-49)确定弹簧-振子系统振动时的周期性，并体现在 TORA 系统的平移小车动态轨迹上。

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{(M + m)}{k}} \quad (2-49)$$

由式(2-49)可知，TORA 系统的斜面情况并不影响其固有周期，系统周期性仅与平移小车质量、旋转小球质量与弹簧的劲度系数有关。

设定平移小车位移  $x$  的目标周期性轨迹  $\bar{x}_d(t)$  以正弦形式表示如下：

$$\bar{x}_d(t) = x_0 + x_A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \quad (2-50)$$

其中  $x_A = (x_d - x_0)$ ， $x_d$  表示目标周期性轨迹的目标点， $x_0$  表示目标周期性轨迹的初始点。当  $x_0 = 0$  时， $x_A = x_d$ 。

旋转小球转角的目标角度  $\theta_d$  可表示如下：

$$\theta_d = n\pi + \alpha \quad (2-51)$$

其中  $\alpha$  表示目标角度的幅角， $\alpha \in (0, \pi)$  且  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

式(2-51)所述旋转小球动态轨迹也具有周期性，此处不明显表现。考虑到旋转小球转角  $\theta$  为一个相对概念，相对于平移小车，旋转小球达到目标周期性轨迹后相对静止，旋转小球动态的周期性与平移小车一致。式(2-50)(2-51)确定 TORA 系统一维周期性轨迹。

## 2.5 本章小结

本章首先采用拉格朗日分析力学的方法建立斜面 TORA 系统的动力学模型，分析系统的无源性、系统的可控平衡点以及平衡点的能控性。并在 Matlab/Simulink 环境下建立系统的数值仿真模型以零输入-零状态验证斜面 TORA 系统动力学及其特性。另外，与系统的可控平衡点相比，分析系统的周期性轨迹的差异，并提出两种不同形式的周期性轨迹，为下文分别基于不同控制策略下实现所提不同周期性轨迹的控制目标奠定基础。

## 第三章 基于虚约束法的 TORA 系统周期性轨迹跟踪

斜面 TORA 系统动力学中, 针对同时实现平移小车和旋转小球周期性振荡的周期性轨迹, 本章采用构造系统自由度间虚拟约束的方法, 设计可实现 TORA 系统二维周期性轨迹跟踪的控制策略, 该策略的基础是虚约束的概念。

### 3.1 虚约束概念

研究 TORA 系统的动态轨迹跟踪问题前, 首先了解虚拟约束方法的基本概念。虚约束的概念由机械领域两个不同范畴引入: (1) 机械系统的机构研究; (2) 机械系统的控制研究。因此虚约束也就有了不同的概念。

#### 3.1.1 机械机构的虚约束

在机械系统的机构中, 往往存在某些运动副带入的约束对机构的运动不产生实际约束效果的重复约束, 这种约束称之为虚约束。机械机构中的虚约束是为满足实际需要或改善机械受力状况而常采用的一种工程措施。例如, 在机械机构运动过程中, 若两构件上某两点之间的距离始终保持不变, 则若以双转动副杆将此两点连接, 将给机构引入一个虚约束。然而, 在计算机构自由度时并不将构成虚约束的机械构件及相关运动副考虑在内, 因此机构的虚约束通常指冗余的约束。

#### 3.1.2 控制构造的虚约束

研究机械系统控制而人为构造虚约束与机械机构中的虚约束的概念完全不同, 控制构造的虚约束强调约束的虚拟性, 即物理上并不存在的约束, 与实际中存在的约束相对应。典型的虚约束如图 3-1 所示。

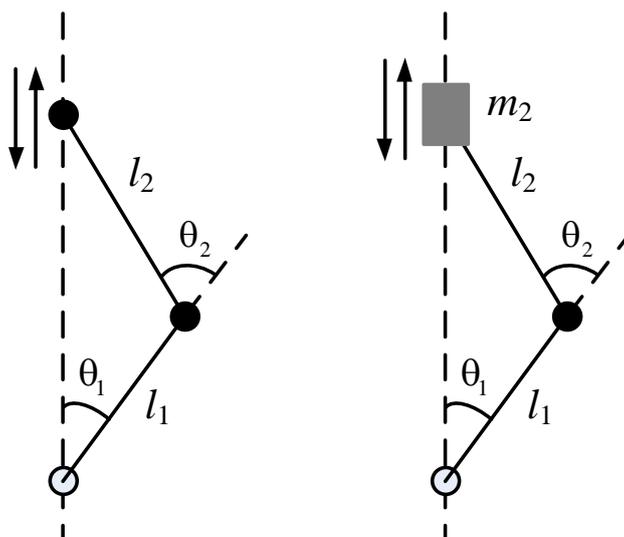


图 3-1 控制构造的虚约束

图 3-1 左图所示为一个两连杆机械臂, 其广义坐标  $(q_1, q_2) = (\theta_1, \theta_2)$ 。通过控制使质心  $m_2$  仅在图 3-1 右图中所示的铅垂线上运动, 如同机构中实际存在一个直线副约束一

样。然而，实际机构中并不存在该直线副，仅通过控制实现出类直线副作用时的运动效果。此时机构形成的约束关系：

$$\xi = l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) = 0 \quad (3-1)$$

式(3-1)的约束将系统运动轨迹限定在一定范围内。

### 3.1.3 虚约束一般形式

对于一般情况下，假设虚约束为：

$$q_1 = \varphi(q_2) \quad (3-2)$$

那么斜面 TORA 系统达到周期性轨迹目标点  $(x_d, 0, \theta_d, 0)$  时应满足  $q_{1d} = \varphi(q_{2d})$ 。另外，当目标周期性轨迹躲避障碍点时，需要在运动过程中经过某些标记点：

$$(q_{11}, 0, q_{21}, 0) \quad (q_{12}, 0, q_{22}, 0) \quad \cdots \quad (q_{1k}, 0, q_{2k}, 0)$$

此时 TORA 系统的周期性轨迹将会增加  $k$  个条件，则有  $k+1$  个约束。选择多项式插值方法获得符合  $k$  个条件的虚约束，显然至少需要  $k$  次多项式：

$$q_1 = \varphi(q_2) = a^k q_2^k + a^{k-1} q_2^{k-1} + \cdots + a^1 q_2 + a^0 \quad (3-3)$$

将标记点带入式(3-3)有：

$$\begin{bmatrix} q_{2d}^k & q_{2d}^{k-1} & \cdots & 1 \\ q_{21}^k & q_{21}^{k-1} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ q_{2k}^k & q_{2k}^{k-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^k \\ a^{k-1} \\ \cdots \\ a^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{1d} \\ q_{11} \\ \cdots \\ q_{1k} \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

解出式(3-3)中多项式系数：

$$\begin{bmatrix} a^k \\ a^{k-1} \\ \cdots \\ a^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{2d}^k & q_{2d}^{k-1} & \cdots & 1 \\ q_{21}^k & q_{21}^{k-1} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ q_{2k}^k & q_{2k}^{k-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} q_{1d} \\ q_{11} \\ \cdots \\ q_{1k} \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

式(3-5)来得出的多项式系数满足  $k$  个条件的虚约束。

## 3.2 虚约束控制设计

根据斜面 TORA 系统的平衡点方程(2-30)，上平衡点是不稳定点，不予讨论。本文将下平衡点为基准，以实现任意空间中目标点的可达性问题。为了做到这一点，我们确定所需点的形式  $(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = (q_{1d}, 0, q_{2d}, 0)$ 。由于周期性轨迹的简单性和稳定性，将设计周期性轨迹实现上述目的。斜面 TORA 系统基于虚约束的方法的目的是产生通过目标点的周期性轨迹。

### 3.2.1 虚约束的设计

斜面 TORA 系统的平移小车和旋转小球的动态轨迹可以由以下两个函数表示：

$$\begin{aligned} q_1 &= \varphi_1(t) \\ q_2 &= \varphi_2(t) \end{aligned} \quad (3-6)$$

在完全驱动机械系统中，上面的轨迹可通过坐标和控制输入的解耦来跟踪。然而，因为控制输入比自由变量少，对于欠驱动 TORA 系统的方法此方法失效。消除时间  $t$ ，选择一个坐标  $q_2$  作为参数，式(3-6)所示的两动态轨迹可以转化为：

$$q_1 = \varphi(q_2) \quad (3-7)$$

式(3-7)不能完全定义平移小车和旋转小球的动态轨迹。所缺的方程可以是一个时间显函数或时间隐函数，如：

$$\varphi_2(q_2, \dot{q}_2) = 0 \quad (3-8)$$

式(3-8)(3-7)联立与(3-6)的两个时间函数等效。函数(3-7)可以被看作是几何约束。通过控制所施加在 TORA 系统上的输入转矩  $\tau$ ，TORA 系统就变成了一维斜面的动态系统。另外，如果时间函数(3-8)与 TORA 系统动力学兼容，那么相应动态轨迹能够进行跟踪。由于该约束物理上是不存在的，它被称为虚约束。

为了找出可控平衡点和动态轨迹目标点之间最简单的虚约束，即下平衡点和周期轨迹的目标点，它涉及到由两点确定一条直线的形式，其可表示为：

$$a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_3 = 0 \quad (3-9)$$

其中  $a_1 \neq 0$  或  $a_2 \neq 0$ 。对于给定的平衡点  $(x_e, \theta_e)$  和目标点  $(x_d, \theta_d)$ ，不失一般性地可将线性虚约束(3-9)改写为：

$$q_1 = a q_2 + c \quad (3-10)$$

其中

$$a = \frac{x_d - x_e}{\theta_d - \theta_e} \quad (3-11)$$

$$c = \frac{x_e \theta_d - x_d \theta_e}{\theta_d - \theta_e} \quad (3-12)$$

控制跟踪 TORA 系统的周期性轨迹时，其轨迹必经过系统的可控平衡点：

$$\mathbf{x}_e = [-(M+m)g \cos \gamma \sin \beta / k, \quad 0, \quad (n \pm 0.5)\pi - \gamma, \quad 0]$$

与动态轨迹目标点：

$$\mathbf{x}_d = [x_d, \quad 0, \quad \theta_d, \quad 0]$$

由以上条件带入式(3-10)可得：

$$\begin{aligned} -(M+m)g \cos \gamma \sin \beta / k &= a[(n+0.5)\pi - \gamma] + c \\ x_d &= a\theta_d + c \end{aligned} \quad (3-13)$$

计算可得式(3-10)中多项式系数的约束条件：

$$a = \frac{x_d + (M+m)g \cos \gamma \sin \beta / k}{\theta_d - (n+0.5)\pi + \gamma}$$

$$c = x_d - \frac{x_d + (M + m)g \cos \gamma \sin \beta / k}{\theta_d - (n + 0.5)\pi + \gamma} \theta_d$$

### 3.2.2 周期性轨迹设计

通过忽略干扰力矩阵  $\mathbf{N}$ ，联立斜面 TORA 系统的动力学(2-12)和所述虚约束(3-10)，斜面 TORA 系统的零动态方程<sup>[75]</sup>可以计算为：

$$\eta(q_2)\ddot{q}_2 + \sigma(q_2)\dot{q}_2^2 + \omega(q_2) = 0 \quad (3-14)$$

其中

$$\begin{aligned} \eta(q_2) &= a(M + m) + mr \cos q_2 \\ \sigma(q_2) &= -mr \sin q_2 \\ \omega(q_2) &= k(aq_2 + c) + (M + m)g \cos \gamma \sin \beta \end{aligned} \quad (3-15)$$

由式(3-14)明显地看到，在虚约束的作用下，斜面 TORA 系统变成一个一维动态系统，该一维动态系统由二阶微分方程描述。因此，对应于每初始状态  $(q_0, \dot{q}_0)$ ，始终存在一种确定的积分曲线，该积分曲线可由  $\psi(q_2, \dot{q}_2, q_0, \dot{q}_0)$  表示。如果初始状态  $(q_0, \dot{q}_0)$  被选择作为目标状态  $(q_d, \dot{q}_d)$ ，该一维动态系统的积分曲线即是目标周期性轨迹。

在零动态方程(3-14)中，不同的初始状态对应于不同的积分曲线。为了保证周期性轨迹的唯一性，需要确定描述曲线的参数。设  $Y(q_2) = \dot{q}_2^2$ ，式(3-14)可以化简为：

$$\frac{dY}{dq_2} + \sigma_0(q_2)Y + \omega_0(q_2) = 0 \quad (3-16)$$

其中

$$\sigma_0 = 2 \frac{\sigma(q_2)}{\eta(q_2)} \quad (3-17)$$

$$\omega_0 = -2 \frac{\omega(q_2)}{\eta(q_2)} \quad (3-18)$$

通过引入积分因子

$$I = e^{\int_{q_0}^{q_2} \sigma_0(x) dx} \quad (3-19)$$

旋转小球周期性轨迹  $Y(q_2)$  的表达式可解：

$$\begin{aligned} Y(q_2) &= -\frac{a(M + m)}{\eta^2(q_2)}(q_2 - q_0)[\omega(q_2) + \omega(q_0)] + \frac{\eta^2(q_2)}{\eta^2(q_0)}\dot{q}_0^2 \\ &\quad + \frac{2ak}{\eta^2(q_2)}[\dot{\sigma}(q_2) - \dot{\sigma}(q_0)] + \frac{2}{\eta^2(q_2)}[\omega(q_2)\sigma(q_2) - \omega(q_0)\sigma(q_0)] \end{aligned} \quad (3-20)$$

因此，周期性轨迹跟踪误差  $\psi(q_2, \dot{q}_2, q_0, \dot{q}_0)$  可表示为：

$$\psi(q_2, \dot{q}_2, q_0, \dot{q}_0) = \dot{q}_2^2 - Y(q_2) \quad (3-21)$$

虚约束(3-10)和旋转小球周期性轨迹(3-20)确定所产生的周期性轨迹，如图 3-2 所示。式(3-20)所描述的积分曲线是虚约束(3-10)成立时 TORA 系统自然运动轨迹，包含了从不

同初始状态所形成的曲线，然而所需要的是其中经过目标点的那一条。易知，过目标点的周期性轨迹有  $\dot{q}_2^2 = Y(q_2)$ ，而过目标点的周期性轨迹上部有  $\dot{q}_2^2 > Y(q_2)$ ，其下部有  $\dot{q}_2^2 < Y(q_2)$ ，显然可以利用这个关系来确定目标周期性轨迹。

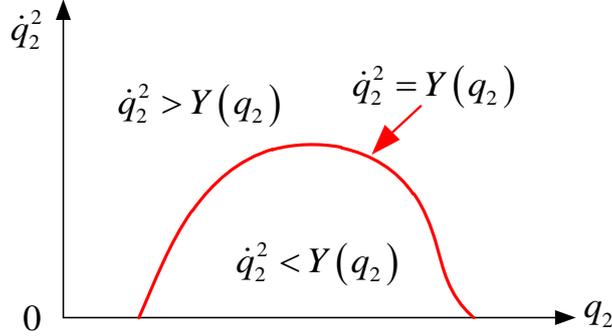


图 3-2 目标周期性轨迹描述函数<sup>[78]</sup>

为了确保该斜面 TORA 系统收敛于目标周期性轨迹，轨迹跟踪控制问题可以转换为输出稳定性问题。虚约束方程(3-10)可以表示为：

$$\rho = \varphi(q_2) - q_1 \quad (3-22)$$

式(3-21)(3-22)的稳定性将在基于串级控制方法得以保证。虚约束视为闭环系统的内环，而动态轨迹被作为外环。以下分别实现内环虚约束的镇定控制与外环轨迹方程的镇定控制。

### 3.2.3 虚约束的镇定控制设计

对于斜面 TORA 系统，矩阵形式(2-12)可改写为：

$$\begin{aligned} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + h_1 &= 0 \\ m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + h_2 &= \tau \end{aligned} \quad (3-23)$$

其中

$$\begin{aligned} h_1 &= -mr \sin q_2 \dot{q}_2^2 + kx + (M + m)g \cos \gamma \sin \beta \\ h_2 &= mgr \cos(\gamma + q_2) \sin \beta \end{aligned} \quad (3-24)$$

$\ddot{q}_1$  和  $\ddot{q}_2$  可以计算为：

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= \frac{-m_{12}\tau - m_{22}h_1 + m_{12}h_2}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}} \triangleq g_1\tau + f_1 \\ \ddot{q}_2 &= \frac{m_{11}\tau + m_{21}h_1 - m_{11}h_2}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}} \triangleq g_2\tau + f_2 \end{aligned} \quad (3-25)$$

联立所选择的式(3-10)和式(3-22)，等式两侧取微分，虚约束的跟踪误差可以表示为：

$$\begin{cases} \rho = aq_2 + b - q_1 \\ \dot{\rho} = a\dot{q}_2 - \dot{q}_1 \\ \ddot{\rho} = a\ddot{q}_2 - \ddot{q}_1 \end{cases} \quad (3-26)$$

为了构建在(3-26)的每个函数之间的关系，设计和引入虚拟控制输入  $v$ ：

$$v = af_2 + ag_2\tau - f_1 - g_1\tau + k_1\dot{\rho} + k_2\rho \quad (3-27)$$

其中  $k_1$  和  $k_2$  是待定的正常数。联立斜面 TORA 系统(3-25)和式(3-27)，所述内环子系统可以写成：

$$\ddot{\rho} + k_1\dot{\rho} + k_2\rho = v \quad (3-28)$$

根据拉普拉斯变换，内环子系统的传递函数可写为：

$$G(s) = \frac{\rho(s)}{v(s)} = \frac{1}{s^2 + k_1s + k_2} \quad (3-29)$$

因此，通过选择适当的参数  $k_1$  和  $k_2$  时，该子系统的输入和输出可实现镇定。

### 3.2.4 周期性轨迹镇定控制设计

对于虚约束(3-10)，假定达到目标点时动态轨迹上旋转小球角速率状态为 0，这时  $Y_0 = 0$ ，周期性轨迹跟踪误差(3-21)可以写为：

$$\psi(q_2, \dot{q}_2, q_0, \dot{q}_0) = \dot{q}_2^2 - I^{-1} \int_{q_0}^{q_2} I\omega_0(x)dx \quad (3-30)$$

选择一个简单的控制 Lyapunov 函数（Control Lyapunov Function, CLF）：

$$V = \frac{1}{2}\psi^2 \quad (3-31)$$

通过式(3-31)中所述的 CLF 对时间求导，可以得到：

$$\dot{V} = \psi\dot{q}_2(2\dot{q}_2 + \sigma Y(q_2) - \omega_0) \quad (3-32)$$

结合式(2-12)(3-22)， $\dot{q}_2$  可表示为：

$$\dot{q}_2 = \frac{m_{11}\ddot{\rho} + k\rho - \sigma(q_2)\dot{q}_2^2 - \omega(q_2)}{\eta(q_2)} \quad (3-33)$$

结合方程(3-32)(3-33)， $\dot{V}$  可表示为：

$$\dot{V} = \frac{2\dot{q}_2}{\eta(q_2)}\psi(m_{11}\ddot{\rho} + k\rho - \sigma(q_2)\psi) \quad (3-34)$$

构造虚拟输入  $v$ ：

$$v = \frac{k_3 \operatorname{sgn}\left(\frac{\psi\dot{q}_2}{\eta}\right) - \sigma\psi + k\rho}{-m_{11}} \quad (3-35)$$

其中  $k_3$  是正常数且  $\operatorname{sign}(\cdot)$  是符号函数，我们有  $\dot{V}$ ：

$$\dot{V} = \frac{2\dot{q}_2}{\eta}\psi\left[-k_3 \operatorname{sgn}\left(\frac{\psi\dot{q}_2}{\eta}\right) - m_{11}(k_1\dot{\rho} + k_2\rho)\right] \quad (3-36)$$

当  $\rho \rightarrow 0$ ， $\dot{\rho} \rightarrow 0$  时，

$$\dot{V} \rightarrow -2k_3 \frac{\psi\dot{q}_2}{\eta} \operatorname{sgn}\left(\frac{\psi\dot{q}_2}{\eta}\right) \leq 0$$

因此，由 Lyapunov 的第二稳定定理，周期性轨迹跟踪误差收敛可以实现对系统的控制。

最终，联立方程(3-27)(3-35)，物理控制输入转矩  $\tau$  可以表达为：

$$\tau = \frac{-v}{ag_2 - g_1} - \frac{k_1 \dot{\rho} + k_2 \rho + af_2 - f_1}{ag_2 - g_1} \quad (3-37)$$

整个控制系统的结构图如图 3-3 所示。从结构图中易知，由给定的目标点和平衡点确定虚约束条件，利用状态反馈实现虚约束跟踪误差  $\rho$  的镇定。由虚约束和 TORA 系统动力学联立的零动态方程，经过积分可确定经过目标点的周期性轨迹  $Y$ ，输入控制 Lyapunov 函数得出虚拟输入  $v$ ，经过控制输入的虚实变换，得出实际输入转矩  $\tau$  作用于 TORA 系统，通过选择合适的控制参数将周期性轨迹跟踪误差  $\psi$  镇定。

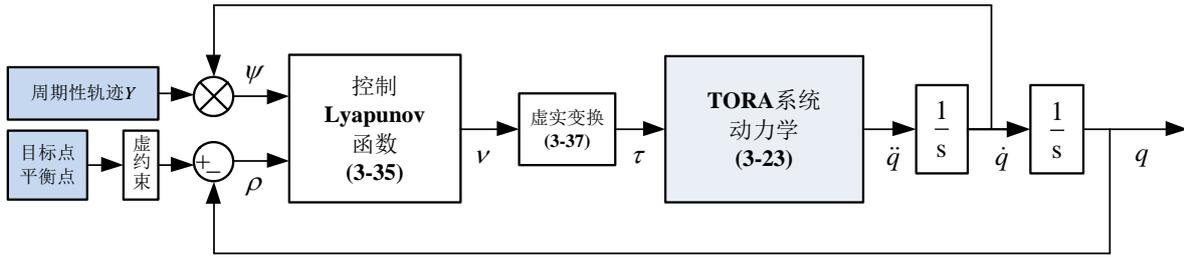


图 3-3 基于虚约束法的 TORA 系统周期性轨迹跟踪控制结构图

### 3.3 仿真验证

为检验本章所提出的基于虚约束方法的周期性轨迹跟踪控制策略的有效性，在 Matlab/Simulink 平台上进行仿真实验。仿真的参数如表 2-1 所示。为了更好的说明斜面 TORA 系统的普适性，本次仿真选取三种斜面情况分别进行仿真和结果分析。

对于斜面 TORA 系统，首先选择位于一般斜面且倾斜放置的 TORA 系统情况进行分析，即  $\beta = \pi/3$ ， $\gamma = 1.29\pi$ ，此时斜面倾角以及倾斜方向角度都具有有一般性。仿真控制参数： $k_1 = 65$ ， $k_2 = 2$ ， $k_3 = 0.6$ 。控制的目标点为： $(x_d, \dot{x}, \theta_d, \dot{\theta}) = (0.04, 0, 0.5\pi, 0)$ 。

由式(2-29)联立可解出此斜面 TORA 系统的平衡点为： $(x_e, \dot{x}, \theta_e, \dot{\theta}) = (0.02, 0, 0.21\pi, 0)$ 。

对于平衡点和目标点，虚约束(3-10)可具体表达为：

$$x = \frac{2}{29\pi} \theta + \frac{4}{725} \quad (3-38)$$

为了确保一般性，将 TORA 系统初始条件选择为： $(x_0, \dot{x}, \theta_0, \dot{\theta}) = (0.02, 0, 0.2\pi, 0)$ 。仿真结果如图 3-4 所示。

从图 3-4 的仿真结果可以看到，斜面 TORA 系统达到所需的周期性振荡状态需要大约 22s。斜面 TORA 系统在从初始点开始振荡，平移小车位置  $x$  和旋转小球转角  $\theta$  的摆动幅值随着控制输入转矩  $\tau$  增加而逐渐增大。平移小车位置  $x$  和旋转小球转角  $\theta$  在起振在后大约 20s 后接近目标点后，控制输入转矩  $\tau$  的振幅基本保持稳定，其范围约为  $[-0.6, 0.6] \text{ N}\cdot\text{m}$ 。另外，平移小车与旋转小球图像稳定时均以初始点为振荡中心，分别以  $(x_d - x_0)$  与  $(\theta_d - \theta_0)$  为振幅，虽因式(3-21)所确定的周期性轨迹过于复杂，但易知各自

由度轨迹函数是类正弦。如图 3-4 右下所示，由旋转小球转矩  $\theta$  时域非对称导致旋转小球在  $xyz$  平面上的轨迹是非对称的周期运动。

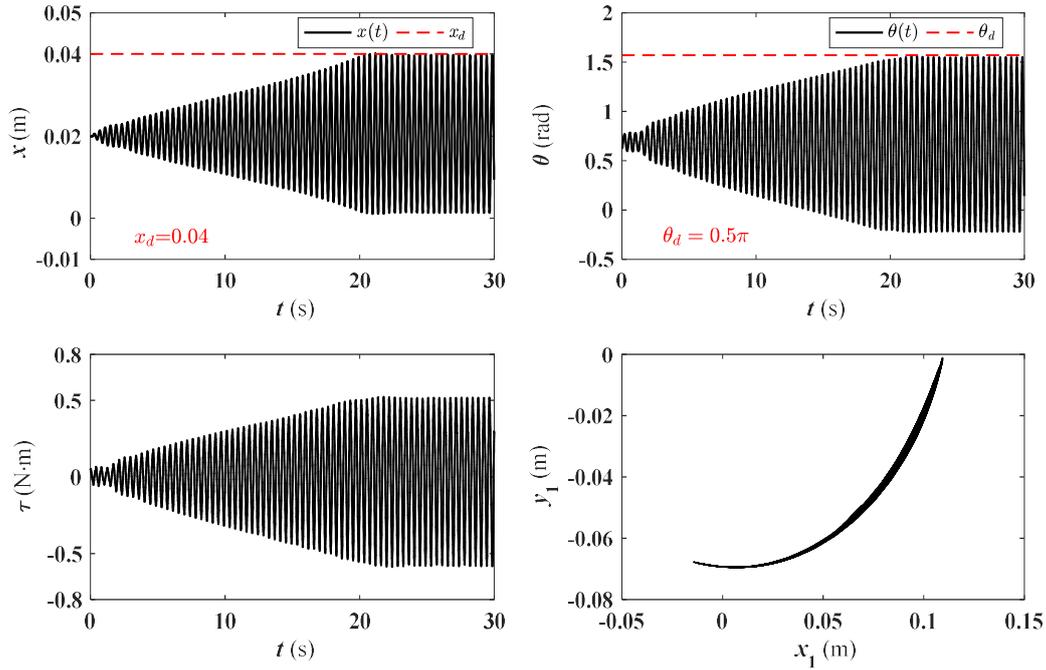


图 3-4 斜面 TORA 系统仿真：  $\beta = \pi/3$ ，  $\gamma = 1.29\pi$

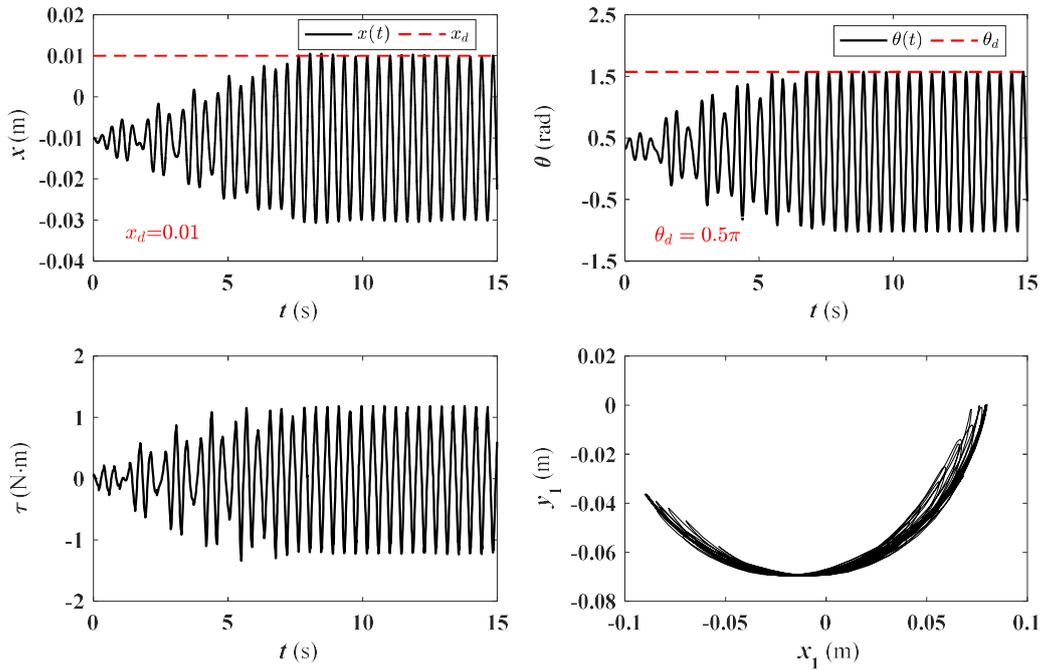


图 3-5 斜面 TORA 系统仿真：  $\beta = \pi/2$ ，  $\gamma = 0.41\pi$

另选择位于垂直面但倾斜放置的 TORA 系统情况进行分析，即  $\beta = \pi/2$ ，  $\gamma = 0.41\pi$ 。仿真控制参数选取如下：  $k_1 = 120$ ，  $k_2 = 0.717$ ，  $k_3 = 1.5$ 。控制的目标点为： $(x_d, \dot{x}, \theta_d, \dot{\theta}) = (0.01, 0, 0.5\pi, 0)$ 。由(2-29)联立可解出此斜面下 TORA 系统的平衡点为： $(x_e, \dot{x}, \theta_e, \dot{\theta}) = (-0.01, 0, 0.09\pi, 0)$ 。对于平衡点和目标点，虚约束(3-10)可具体表达为：

$$x = \frac{2}{41\pi}\theta - \frac{59}{4100} \quad (3-39)$$

TORA 系统的初始条件选择为:  $(x_0, \dot{x}_0, \theta_0, \dot{\theta}_0) = (-0.01, 0, 0.1\pi, 0)$ 。基于以上条件, 仿真结果如图 3-5 所示。

根据图 3-5 可以看出此情况下的倾斜 TORA 系统振荡大约 8s 后稳定在目标点轨迹上, 比  $\beta = \pi/3$ ,  $\gamma = 1.29\pi$  的情况下系统镇定速度快。也就是说此情况下 TORA 系统振荡的收敛速度与斜面坡度和系统的放置倾斜角度都有关。控制输入转矩  $\tau$  为维持目标点可达所示转矩幅值变大, 并最终达到周期性稳定性。如图 3-5 右下所示, 虽然斜面的倾角被改变, 但是 TORA 系统仍然在一个倾斜面, 旋转小球的轨迹保持高度不对称。

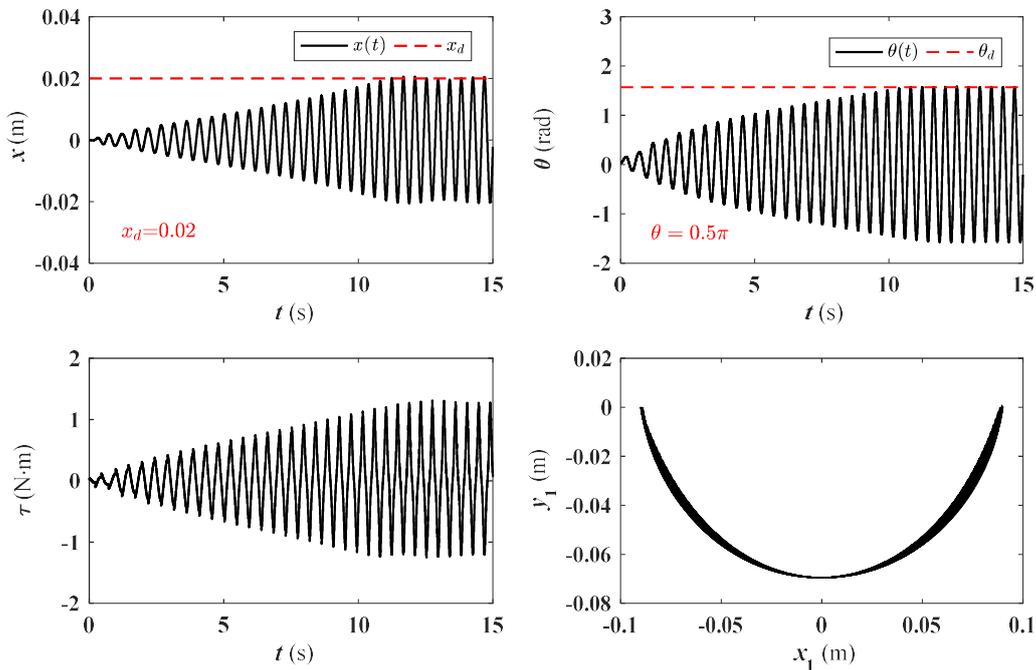


图 3-6 平面 TORA 系统仿真:  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0$

最后, 选择位于水平面且水平放置的 TORA 系统况进行分析, 即  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0$ , 此时 TORA 系统位于水平面上。仿真控制参数选取如下:  $k_1 = 45$ ,  $k_2 = 2$ ,  $k_3 = 1.2$ 。控制的目标点为:  $(x_d, \dot{x}_d, \theta_d, \dot{\theta}_d) = (0.02, 0, 0.5\pi, 0)$ ; 初始条件为:  $(x_e, \dot{x}_e, \theta_e, \dot{\theta}_e) = (0, 0, 0.01\pi, 0)$ 。由(2-29)联立可解出此斜面情况下 TORA 系统的平衡点为:  $(x_0, \dot{x}_0, \theta_0, \dot{\theta}_0) = (0, 0, 0, 0)$ 。对于平衡点和目标点, 虚约束方程(3-10)可具体表达为:

$$x = \frac{0.04}{\pi}\theta \quad (3-40)$$

基于以上条件, 仿真结果如图 3-6 所示。从仿真结果可以看出, 该系统大约 12s 后实现目标轨迹点镇定, 这要比  $\beta = \pi/2$ ,  $\gamma = 0.41\pi$  的情况下镇定速度较慢。在此特殊的情况下, 系统的振荡将不会受到重力  $g$  的影响, 且旋转小球的最终运动轨迹对称。

另外, 虽然式(3-21)所确定的周期性轨迹表示过于复杂, 但由以上三种情况下的仿

真结果易确定平移小车和旋转小球的目标周期性轨迹。动态轨迹目标点在虚约束方法下可确定唯一过该点的周期性轨迹，故系统各自由度实现目标点可达即实现对应周期性轨迹的跟踪控制。

仿真结果证实，本章所提出的基于虚约束方法的控制设计，在斜面 TORA 系统中可成功跟踪通过目标点的运动轨迹。

### 3.4 本章小结

本章研究了斜面欠驱动 TORA 系统动态轨迹目标点的可达性问题。所设计的基于轨迹生成方案的虚约束，可以产生通过在状态空间中任意目标点的周期性轨迹。所提出的级联控制方法，可解决结合虚约束和周期性轨迹所转换后的动态系统的轨迹跟踪控制器的镇定问题，其中虚约束和周期轨迹分别被视为所述闭环系统的内环和外环。仿真结果表明，所提出的控制设计可以使 TORA 系统镇定，生成可顺利通过目标点的轨迹。而对于斜面 TORA 系统，在驱动的旋转小球周期轨迹将是不对称的，对于平面 TORA 系统，旋转小球的周期性轨迹则是对称的，这种非对称性与重力有关。本章所提出的方法也可应用到其他欠驱动系统中，来实现复杂的控制设计以及扩展其应用。

本章给出了基于虚约束的周期性轨迹规划方法，虽然该方法控制有效且具有一定灵活性，但存在一个明显的缺点，即控制设计过程异常复杂；也就是针对给定目标点，所规划出的轨迹是确定的，如果想对其附加一些约束，比如要求动态轨迹稳定时旋转小球转角镇定在某固定角度，基于虚约束的方法是无能为力的。下一章所述的基于系统能量的控制方法正是为简化控制设计环节而提出的。

## 第四章 基于能量法的 TORA 系统周期性轨迹跟踪

虚拟约束的方法运用到 TORA 系统,同时实现了平移小车和旋转小球周期性振荡的周期性轨迹的目标周期性轨迹的跟踪控制,但该周期性轨迹控制设计过程相对复杂。本章针对平移小车周期性运动、旋转小球保持定值的周期性轨迹,采用了基于系统能量守恒与分配的方法,实现了 TORA 系统中平移小车的周期性轨迹跟踪。

### 4.1 保守系统

系统总能量是描述欠驱动系统的物理量之一,常用于分析系统的功能转换关系。对于保守系统,其总能量是守恒的,无论系统跟踪何种运动轨迹,其机械能在各个时刻总是保持恒定的(例如钟摆系统),如果不考虑系统摩擦的影响,那么系统能量守恒并且以一定的周期运动。实际上,不仅仅是重力势能,各种类型的保守系统都存在类似的性质。下面首先通过一个例子来说明保守系统中的周期运动。

#### 4.1.1 保守系统运动的周期性

重力、弹力、电场力等是常见的保守力。重力场中的保守系统如前述的钟摆系统,由弹力构成的保守系统经典的如弹簧-振子系统,电场中的保守系统如点电荷系统。其中,点电荷系统是一种类钟摆系统,如图 4-1 所示。

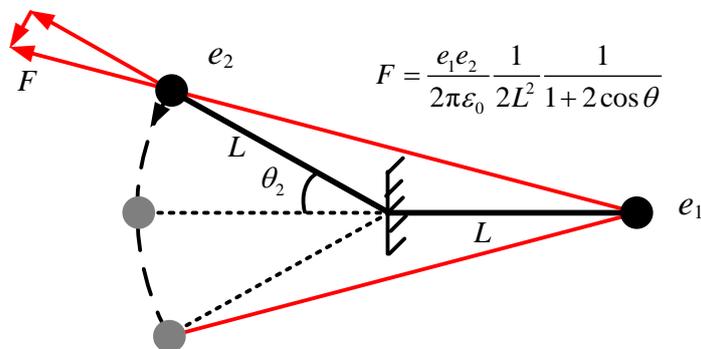


图 4-1 点电荷系统

在图 4-1 所示的水平面上,点电荷  $e_2$  置于同极点电荷  $e_1$  所构造的辐射状电场中,两电荷由轻质绳索连接。在电场力的作用下,绳索自然张紧,受力分析后建立点电荷系统动力学模型:

$$J\ddot{\theta}_2 = -\frac{e_1 e_2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{2L^2} \frac{\sin(\theta_2/2)}{1+\cos\theta_2} \quad (4-1)$$

$\theta_2$  微小摆动情况下,近似有  $\sin(\theta_2/2) \approx \theta_2/2$ ,  $\cos\theta_2 \approx 1$ , 则式(4-1)变为:

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta}_2 &= -\frac{e_1 e_2}{2\pi_0} \frac{1}{8L^2} \theta_2 \\ &= -k\theta_2 \end{aligned} \quad (4-2)$$

因此小幅摆动情况下， $\theta_2$  的运动轨迹为：

$$\theta_2 = C_1 \sin(\sqrt{k/Jt}) + C_2 \cos(\sqrt{k/Jt}) \quad (4-3)$$

当大幅摆动时，虽然 $\theta_2$ 的运动轨迹无法用上式表示，但在一定范围内仍然是周期性的，这与钟摆系统相一致。从以上两个例子可以看出，保守系统中自然存在着周期运动。而对于非保守系统，若非保守力不做功，则系统等价于保守系统，因此可以通过分析此时系统的性质来产生满足系统特性的周期性轨迹。

#### 4.1.2 保守系统的能量守恒

非保守系统的所有外力都不做功，那么该系统可视为保守系统。对于欠驱动 TORA 系统，当视其为保守系统时，式(2-21)所示的无源性应满足：

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^m \tau_i \dot{q}_i = 0 \quad (4-4)$$

保守系统满足式(4-4)，分为以下三种情况讨论。

##### (1) 系统所有输入 $\tau_i = 0$

无驱动输入时系统闭环动力学模型(2-12)可表示为：

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (4-5)$$

此时 TORA 系统静止在平衡点或自由运动。自由运动的轨迹虽然满足系统动力学特性，但其自由度并不受控，很难确保其轨迹跟踪目标点，故避免此情况。

##### (2) 系统所有受驱动的广义速度 $\dot{q}_i = 0$

系统所有受驱动的广义速度  $\dot{q}_i = 0$  时，其受驱动的广义自由度应满足：

$$q_1 = q_{1d} \quad q_2 = q_{2d} \quad \cdots \quad q_m = q_{md} \quad (4-6)$$

此时系统零动态方程

$$m_{nn}\ddot{q}_n + \sigma(q_{1d} \cdots q_{md}, q_n)\dot{q}_n^2 + \omega(q_{1d} \cdots q_{md}, q_n) = 0 \quad (4-7)$$

该情况下保证系统各自由度为目标点，通过控制驱动输入，确保广义速度、广义加速度均为零。由于广义速度为零，存在的驱动输入不做功。另外，无论系统自由度目标点是多少，式(4-7)都可满足，因此，该情况可能得到同时满足式(4-6)(4-7)两个条件的轨迹。

##### (3) 系统所有输入与所有广义速度乘积 $\tau_i \dot{q}_i = 0$

一般地，系统所有输入与所有广义速度乘积  $\tau_i \dot{q}_i = 0$  更为常见。理论上该情形是可以实现系统整体上的能量守恒，其内部的关系有不确定性，这不利于得到一个确定的周期性轨迹。但实际上，只需一个控制输入即可保证式(3-6)成立，对于 TORA 系统而言没有其他控制输入，系统中不存在未知变量，因此更容易确定积分轨迹。

对于保守系统，系统机械总能量是最合适的控制变量。由于保守系统各自由度在运动过程中总能量守恒，因此每个自由度对应的动态轨迹都具有不同的恒定能量，通过控制使得系统总能量达到目标能量值，且若各自由度符合约束条件，那么系统就会沿着该能量值代表的周期性轨迹运动。

TORA 系统中，通过计算得到目标能量值，给定目标周期性轨迹目标点，其控制策

略的  $n$  个条件可写为:

$$\begin{cases} q_1 = q_{1d} \\ \dots \\ q_m = q_{md} \\ E = E_d \end{cases} \quad (4-8)$$

当上式中  $n$  个条件成立时, TORA 系统即跟踪确定的周期性轨迹。

## 4.2 能量法控制设计

通过忽略干扰力矩阵  $\mathbf{N}$ , 针对平面 TORA 系统的动力学方程(2-14)控制实现如图 2-4 所示的周期性轨迹跟踪。当系统的目标周期性轨迹跟踪完成, 旋转小球相对于平移小车静止, 平移小车实现振幅为  $(x_d - x_0)$  的周期振荡运动, 且系统总能量守恒。当系统实现目标周期性轨迹的跟踪时, 目标周期性轨迹所具有系统总能量  $E_d(t)$ , 以弹簧弹性势能形式表示为:

$$E_d(t) = \frac{1}{2} k x_d^2 \quad (4-9)$$

在旋转小球转角  $\theta$  的动态轨迹跟踪控制中, 当  $t \geq t_0$ ,  $|\theta(t) - \theta_d| < \delta_\theta$ , 且输入转矩  $\tau$  为零时, TORA 系统若要维持目标周期性轨迹的持续跟踪, 需满足  $\theta_d = (n \pm 0.5)\pi$  限制。

旋转小球转角  $\theta$  的目标角度  $\theta_d = (n \pm 0.5)\pi$  实质上为一种特殊目标轨迹, 即此时小球转角  $\theta$  的目标周期性轨迹落在  $x$  轴向上。若小球转角  $\theta$  动态轨迹中  $\alpha \neq \pm 0.5\pi$  时, TORA 系统依然可确保各自由度达到目标周期性轨迹, 此时旋转小球由于在  $x$  轴径向运动方向有分冲量, 故系统会存在输入转矩  $\tau$  的额外补偿维持旋转小球转角  $\theta$  在目标周期性轨迹上的相对稳定。

为跟踪目标周期性轨迹, 输入转矩  $\tau$  注入系统的能量达到目标能量值  $E_d(t)$  即可完成系统达到动态轨迹时的能量守恒, 此为系统能量的镇定控制过程。在构造控制 Lyapunov 函数时, 易知须含有系统总能量误差项  $e_E$ :

$$e_E = E(t) - E_d(t) \quad (4-10)$$

可完成系统能量的目标能级收敛。

通过旋转小球转角  $\theta$  及其导数的调节, 完成平移小车位移  $x$  与旋转小球转角  $\theta$  跟踪各自目标周期性轨迹。与此同时, 系统总能量以平移小车动能、旋转小球动能和弹簧势能的形式相互转化, 此过程完成了能量的分配。系统总能量守恒时, 通过调节旋转小球动能可使平移小车动能和弹簧势能得到调节。故构造的控制 Lyapunov 函数含有小球转角误差项  $e_\theta$ :

$$e_\theta = \theta(t) - \theta_d \quad (4-11)$$

可完成旋转小球转角  $\theta$  对目标周期性轨迹的跟踪收敛, 实现能量的分配调节。最后, 构造的控制 Lyapunov 函数须含有旋转小球转角速度项完成系统能量的合理分配。

根据以上分析，利用 TORA 系统的无源性，构造控制 Lyapunov 函数如下：

$$V(x, \dot{x}) = 0.5k_1 e_E^2 + 0.5k_2 e_\theta^2 + 0.5k_3 \dot{\theta}^2 \quad (4-12)$$

其中控制参数  $k_1$ 、 $k_2$ 、 $k_3$  为正常数。

对式(4-12)求导后，联立式(2-21)得到：

$$\dot{V}(x, \dot{x}) = \dot{\theta}(k_1 e_E \tau + k_2 e_\theta + k_3 \ddot{\theta}) \quad (4-13)$$

令式(4-13)中：

$$k_1 e_E \tau + k_2 e_\theta + k_3 \ddot{\theta} = -k_4 \dot{\theta} \quad (4-14)$$

其中控制参数  $k_4$  为正常数。

方程(4-14)中  $\ddot{\theta}$  由方程组(2-14)联立获得为：

$$\ddot{\theta} = \frac{(M+m)\tau + mrh_1 \cos \theta}{\Delta} \quad (4-15)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta &= (M+m)(mr^2 + I) - (mr \cos \theta)^2 \\ h_1 &= -mr \sin \theta \dot{\theta}^2 + kx \end{aligned} \quad (4-16)$$

由式(4-14)带入式(4-13)，易知式(4-13)可表示为：

$$\dot{V}(x, \dot{x}) = -k_4 \dot{\theta}^2 \leq 0 \quad (4-17)$$

为半负定的，当且仅当  $\dot{\theta} = 0$  时  $\dot{V}(x, \dot{x}) = 0$ 。

由式(4-14)(4-15)联立可求出输入转矩  $\tau$ ：

$$\tau = -\frac{\Delta(k_4 \dot{\theta} + k_2 e_\theta) + k_3 mrh_1 \cos \theta}{k_1 e_E \Delta + k_3 (M+m)} \quad (4-18)$$

得到式(4-18)所需的输入转矩  $\tau$  作为旋转激励作用 TORA 系统可实现该装置周期性轨迹跟踪控制。

当式(4-18)中控制参数调节满足：

$$k_1 e_E \Delta + k_3 (M+m) \neq 0 \quad (4-19)$$

控制器  $\tau$  无控制奇点。由于  $\Delta > 0$  且  $e_E$  存在小于零的情况，式(4-19)可能达到奇点，正常数  $k_1$  和  $k_3$  的取值关系如：

$$\left| \frac{k_3}{k_1} \right| \neq \left| \frac{e_E \Delta}{M+m} \right|$$

可避免奇点的产生，满足式(4-19)的约束条件。

同时含有误差项  $e_E$ 、 $e_\theta$ ，含有调节项  $\dot{\theta}$ ，使得控制 Lyapunov 函数式(4-12)体现三项作用：系统总能量跟踪、旋转小球转角误差跟踪以及整定旋转小球转角速度  $\dot{\theta}$  为零。同时式(4-18)完成了系统目标能量值的获得与守恒，系统能量在平移小车、旋转小球和弹簧之间不同能量形式的特定分配问题。平移小车位移  $x$  和旋转小球转角  $\theta$  由此达到目标周期性轨迹。

### 4.3 稳定性分析

下面利用 LaSalle 不变性原理证明闭环系统在目标周期性轨迹上的稳定性。

对 TORA 系统动力学(2-14)在构造的控制器(4-18)作用下, 闭环系统可以从任意初始位置渐近收敛至给定自由度的目标周期性轨迹上, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}]^T = [\bar{x}_d, \dot{\bar{x}}_d, \bar{\theta}_d, \dot{\bar{\theta}}_d]^T$$

证明过程分二步: 1、闭环系统的所有状态量均有界, 即  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\dot{\theta}(t)$   $\tau(t) \in \Omega_\infty$ ; 2、不变集仅含有目标周期性轨迹。

由最大跟踪误差定义式(2-45)可得:

$$|x(t) - \bar{\beta}_d(t)| \leq \sup e(t) \quad (4-20)$$

即系统中同自由度误差变化量有界, 化简为:

$$\bar{\beta}_d(t) - \sup e(t) \leq x(t) \leq \bar{\beta}_d(t) + \sup e(t)$$

易知系统中各自由度有界, 即  $x(t) \in \Omega_\infty$ 。  $\dot{x}(t) = [\dot{x}, \dot{\theta}]^T$  为  $x(t)$  导数, 且为局部 Lipschite 的, 易证明  $\dot{x}(t) \in \Omega_\infty$ , 另由式(4-18)可得输入转矩  $\tau \in \Omega_\infty$ 。

为证明该定理, 定义如下不变集  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \left\{ (x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) \mid \dot{V}(x, \dot{x}) = 0 \right\} \quad (4-21)$$

由式(4-17)可知在不变集  $\Gamma$  中:

$$\dot{\theta}(t) = 0 \quad (4-22)$$

由式(4-22)易知在不变集  $\Gamma$  中:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \text{const.} \\ \ddot{\theta}(t) &= 0 \end{aligned} \quad (4-23)$$

以下确定不变集  $\Gamma$  中  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  的函数。考虑  $\theta(t) = \text{const.}$ ,  $\dot{\theta}(t) = 0$ , TORA 系统的旋转小球转角在终止状态保持恒定, 系统此时退化为弹簧-振子系统, 振子为平移小车与旋转小球的质量总和。因弹簧-振子系统的固有周期如式(2-49)所示, 振子位移函数  $x_o(t)$  转变为正弦形式为:

$$x_o(t) = B + A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_o\right) \quad (4-24)$$

其中  $A$  为振子振幅,  $B$  为振子起振位置,  $\varphi_o$  为振子周期性振荡转变为正弦形式的初相角。

显然振子速度函数  $\dot{x}_o(t)$  为:

$$\dot{x}_o(t) = A \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_o\right) \quad (4-25)$$

则已证明不变集  $\Gamma$  中:

$$(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) = (x_o(t), \dot{x}_o(t), \text{const.}, 0)$$

当取  $A = x_d - x_0$ ,  $B = x_0$ ,  $\varphi_o = \varphi$ ,  $\text{const.} = \theta_d$  时, 式(4-24)的振子位移  $x_o(t)$  化为式(2-50)平移小车位移  $x$  目标周期性轨迹; 旋转小球转角  $\theta(t)$  的目标角度化为式(2-51)中  $\theta_d$ 。

综合以上分析可知, 不变集  $\Gamma$  的最大不变集为  $[\bar{x}_d, \dot{x}_d, \bar{\theta}_d, \dot{\theta}_d]^T$ , 根据 LaSalle 不变性原理可知, TORA 系统在控制器式(4-18)作用下, 随时间推移各自由度渐近收敛到对应的目标周期性轨迹上。

### 4.4 仿真实验

为检验本章所提出的基于能量方法的周期性轨迹跟踪控制策略的有效性, 在 Matlab/Simulink 平台上进行仿真实验。仿真的参数如表 2-1 所示。为了更好的说明本章所提控制策略的优点, 并为下一章的 TORA 系统物理平台控制实验做对比, 本次仿真选取 2 种情况分别进行仿真和结果分析。

#### 4.4.1 验证性仿真实验

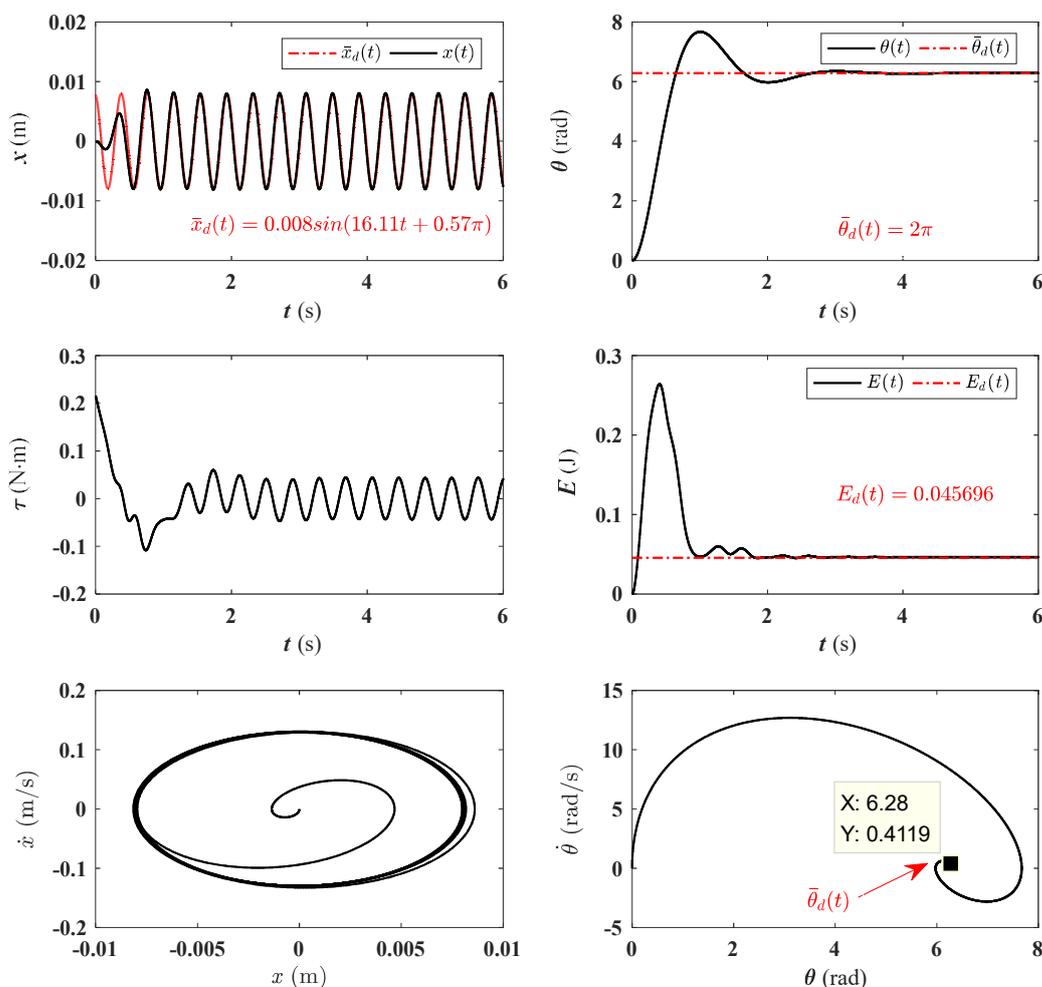


图 4-2 TORA 系统控制仿真图:  $x_d = 0.008$ ,  $\theta_d = 2\pi$ ,  $\alpha = 0$

该组实验选取控制目标点为  $x_d = 0.008$ ,  $\theta_d = 2\pi$ 。此时目标周期性轨迹能量

$E_d(t) = 0.045696\text{J}$ 。控制器式(4-18)中控制参数选取以及过控制目标点的周期性轨迹如下：

- (1) 控制参数： $k_1 = 1, k_2 = 4.8, k_3 = 0.4, k_4 = 1.2$
- (2) 目标周期性轨迹： $\bar{x}_d(t) = 0.008\sin(16.11t + 0.57\pi), \theta_d = 2\pi$

仿真结果如图 4-2 所示。由第一列两幅图易知，控制器能快速使平移小车与旋转小球跟踪至给定的目标周期性轨迹并迅速稳定，大约 4s 时整个 TORA 系统即实现动态稳定，相比于图 4-3 所示的仿真结果，该控制目标下的控制器控制效率基本无差。由第二列左图易知，输入转矩  $\tau$  控制过程的输出范围  $[-0.1, 0.2]\text{N}\cdot\text{m}$ ，约是图 4-3 所示  $\tau$  输出范围的一半，右图表明平移小车动态轨迹的振幅主要影响系统总能量与输入转矩的大小。第三列两幅图易知，各自由度相轨迹的跟踪过程，平移小车相轨迹跟踪至目标周期性轨迹时也为椭圆形；旋转小球相轨迹跟踪至目标周期性轨迹时为一固定点。

#### 4.4.2 对比性仿真实证

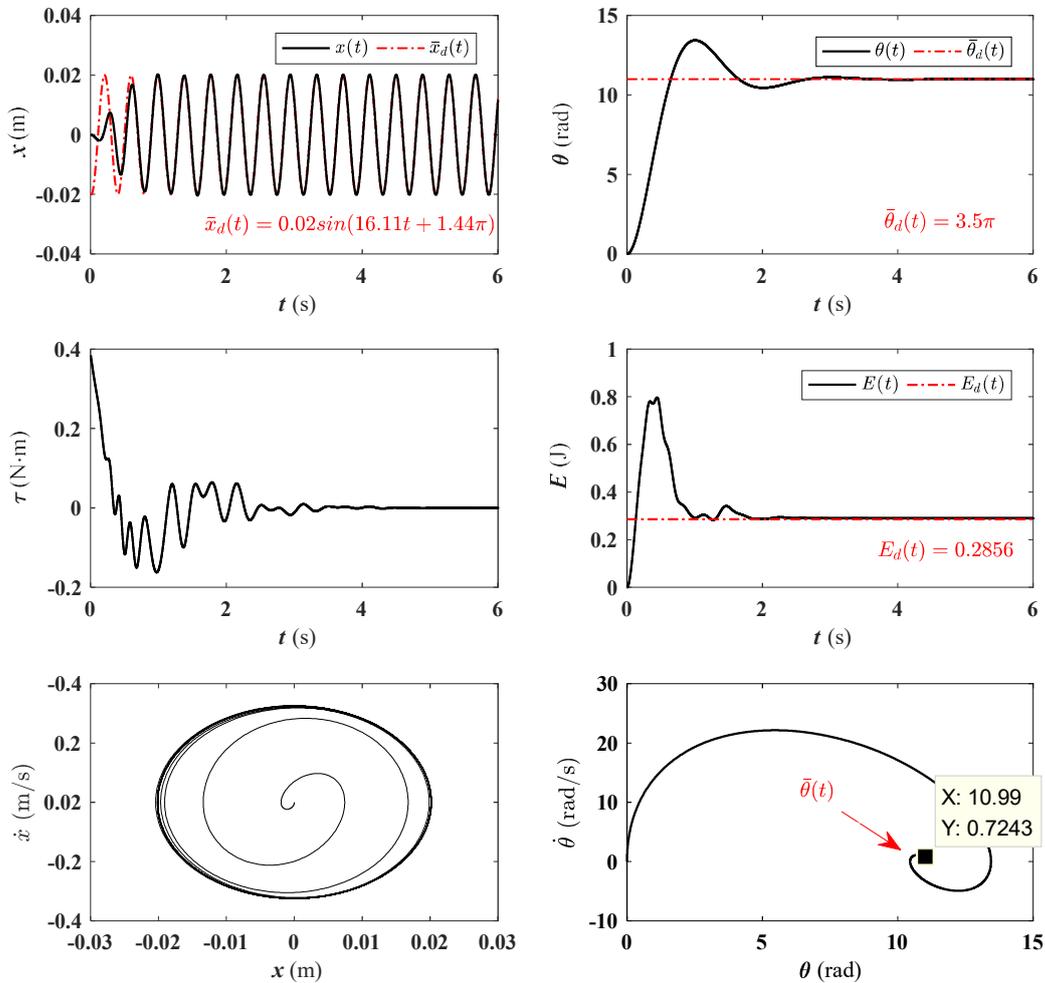


图 4-3 TORA 系统控制仿真图： $x_d = 0.02, \theta_d = 3.5\pi, \alpha = 0.5\pi$

该组实验与图 3-6 所示的斜面情况与控制目标点一致， $x_d = 0.02, \theta_d = 3.5\pi$ 。此时目标周期性轨迹能量  $E_d(t) = 0.2856\text{J}$ 。控制器式(4-18)中控制参数选取以及过控制目标点

的周期性轨迹如下：

(1) 控制参数： $k_1 = 2$ ， $k_2 = 1.2$ ， $k_3 = 0.1$ ， $k_4 = 0.3$

(2) 目标周期性轨迹： $\bar{x}_d(t) = 0.02 \sin(16.11t + 1.44\pi)$ ， $\theta_d = 3\pi + 0.5\pi$

仿真结果如图 4-3 所示。由第一列两幅图易知，控制器能快速使平移小车与旋转小球跟踪至给定的目标周期性轨迹并迅速稳定，大约 4s 时整个 TORA 系统即实现动态稳定，相比于基于虚约束方法构造的控制器，基于能量法构造的控制器更加高效。由第二列左图易知，输入转矩  $\tau$  控制过程的输出范围  $[-0.2, 0.4] \text{N}\cdot\text{m}$ ，远小于图 3-6 中输入转矩的输出范围，说明基于能量法构造的控制器更加经济；右图表明系统实现周期性轨迹跟踪后动态稳定时，系统总能量守恒，各自由度轨迹跟踪无偏差。第三列两幅图易知，各自由度相轨迹的跟踪过程，平移小车相轨迹跟踪至目标周期性轨迹时为椭圆形；旋转小球相轨迹跟踪至目标周期性轨迹时为一固定点。

## 4.5 本章小结

在第三章中基于虚约束法的动态轨迹跟踪控制设计环节过于复杂的情况下，本章讨论了基于系统能量法的 TORA 系统周期性轨迹跟踪控制问题。基于系统能量守恒与分配的思想，提出了一种简便地控制 Lyapunov 稳定性理论的控制器的控制 Lyapunov 函数，实现旋转小球、平移小车与系统总能量三个函数的共同镇定，从而实现对各自由度目标周期性轨迹的跟踪，仿真结果表明了此方法的可行性与高效性。

基于能量法的控制设计理论虽然完备，但是以上仅考虑理想情况下的控制设计，在实际应用中，由于摩擦因素的存在，上述控制器合理应用则需要添加摩擦补偿项，添加摩擦项十分繁杂，或存在无法实现的情况。因此，下章重点介绍一种可适应于实际物理平台的基于系统能量方法。

## 第五章 TORA 装置与实验研究

非线性控制领域的理论研究工作，为了验证所提出的控制算法有效性，往往只利用 Matlab 等数学软件实现仿真来验证，若搭建一个物理平台对所设计的控制算法进行实际验证更有现实意义。

数学模型基于假设的前提对物理对象重新描述，忽略掉了实际系统中许多不利因素，这些不利因素的发现和解决，可更加深刻地理解和应用欠驱动系统，使得理论层面的控制器设计更加实用化。欠驱动基准系统的物理装置经过开发已经存在很多，如直线倒立摆系统、龙门吊车系统、Pendubot 与 Acrobot 物理系统等。基于应用层面的考虑，本文设计了一个 TORA 系统物理平台，作为后续实践验证理论的基础。

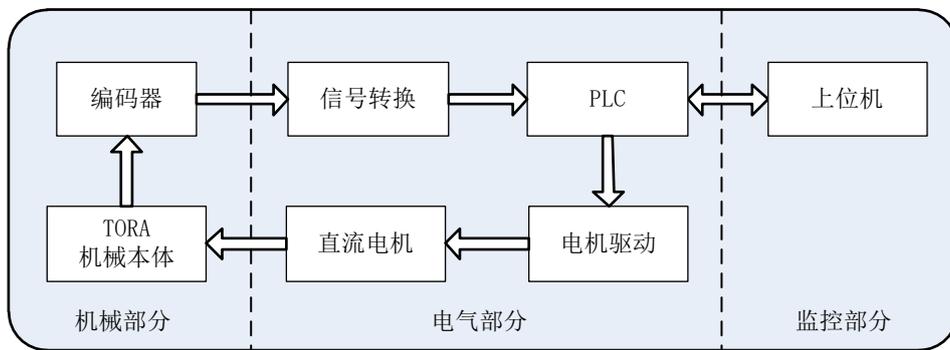


图 5-1 TORA 物理平台整体结构图

TORA 系统实验平台所具有的基本功能，除了可以控制跟踪目标周期性轨迹外，还具有一定的通用性，在这里主要是指控制器的灵活性、操作的易用性、可扩展性等。TORA 系统实验平台控制器采用西门子 S7-200 型 PLC 可编程控制器，其优点是简洁的编程与广泛的工业应用，驱动电机采用瑞士 MAXON 的 90W 盘式无刷直流电机。系统整体结构图如图 5-1 所示。

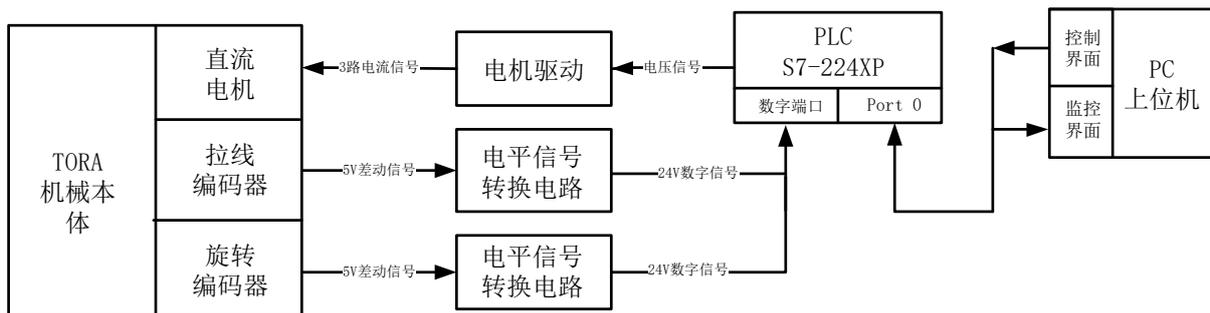


图 5-2 TORA 物理平台控制框图

由图 5-1 所示，TORA 系统物理平台主要分为机械部分、电气部分与监控部分。机械部分主要由 TORA 系统机械本体构成，其输出二维均有编码器采集状态量；电气部分主要功能是将编码器采集到的系统状态量进行电平转换，编程出所设计的控制器程序，通过 PLC 实现电气驱动的控制，进而控制直流电机的输出转矩；监控部分主要是上位机的人机交互界面，主要是西门子 S7-200 编程软件 STEP 7 MicroWIN，与 MAXON 电

机控制软件 ESCON Studio，实现系统输入输出的控制与信息提取。TORA 系统物理平台的控制逻辑框图如图 5-2 所示。

### 5.1 实验装置

TORA 系统物理平台如图 5-3 所示，其各部分构成的元件参数如表 5-1 所示。

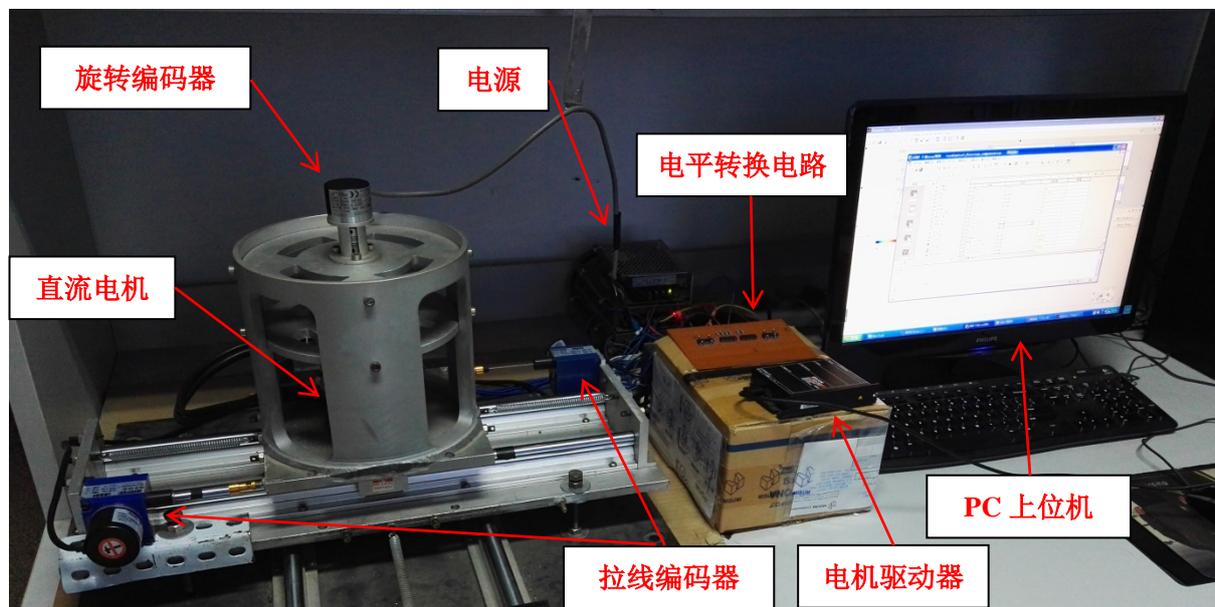


图 5-3 TORA 系统物理平台

由 TORA 系统物理平台可以看出，平台本身结构简洁，易于搭建，方便所设计的控制器实现。该物理平台所对应的平面 TORA 动力学：

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x} + mr \cos \theta \ddot{\theta} - mr \sin \theta \dot{\theta}^2 + kx + N_x &= 0 \\ mr \cos \theta \ddot{x} + (mr^2 + I)\ddot{\theta} + N_r &= \tau_2 \end{aligned} \tag{5-1}$$

其中  $N_x$  表示平移小车位移方向的摩擦力； $N_r$  表示连接旋转小球的直流电机转轴的摩擦力。 $\tau_2$  为 TORA 系统装置实现周期性轨迹跟踪的输入转矩； $N_x$  与  $N_r$  的具体模型须辨识。

表 5-1 TORA 系统平台元件参数表

编码器			PLC	直流电机
旋转	日本 NEMICON OVW2-1024-2MD 测量精度：4096p/r	品牌	德国 SIEMENS	瑞士 Maxon
		型号	S7-200 224xp	EC 90 盘式无刷
拉线	烟台五丰 TF20-200-100BW-G05L 测量精度：1024p/10mm 重复精度：0.05% 线性精度：0.1%	参数	HSC 时钟输出速率 20kHz 输出延时 (Q0.0 与 Q0.1): OFF 到 ON 最大 2μs ON 到 OFF 最大 10μs 模拟量输出范围 0-10V	空载转速：2080rpm 额定转速：1640rpm 额定转矩：0.494 N·m 额定电流：2.12A 最大效率：85% 电机磁极对称：12 机械时间常数：14.9ms

由于 S7-200 224xp 型号 PLC 的模拟量输出点 AQWO (范围为 0-32000) 与模拟量电压  $U$  输出 (范围 0-10V) 呈线性关系：

$$AQWO = 3200 \cdot U \tag{5-2}$$

Maxon 直流电机的驱动器型号为 ESCON-50/5-409510，具有串励电动机外特性，因其具有较大的起动转矩与过载能力，多用于牵引类机械系统。该电机适用于 TORA 系统实验平台时，选其电流闭环控制模式，即将输入电机驱动器的电压信号转换为电流控制信号，通过串励电机外特性实现直流电机输出转矩的间接控制。

由于电机驱动器的模拟量输入范围（输入量为  $U$ ）与电流控制量  $I$ （范围 0-2.5A）呈线性关系：

$$U = 4 \cdot I \quad (5-3)$$

其中，电机额定电流为 2.12A。又由 Maxon-EC-90-盘式无刷直流电机在该工况下的转矩常数为  $0.2614 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{A}$ ，得出该直流电机输出转矩与其输入电流间关系：

$$\tau = 0.2614 \cdot I \quad (5-4)$$

联立式(5-2)(5-3)(5-4)可得：

$$\tau = 2.0421875 \times 10^{-5} \cdot A Q W O \quad (5-5)$$

式(5-5)表明了 PLC 控制器对直流电机的控制关系。

## 5.2 装置系统的摩擦辨识

本文第三四章设计的控制策略均基于前提假设：理想无摩擦因素干扰情况下的 TORA 系统。但物理平台不可避免的要解决摩擦问题。摩擦具有复杂非线性以及不确定性的特点，科学研究目前还仅停留在定性认知的阶段，尚不存在可精确解析摩擦过程的数学模型<sup>[79]</sup>。通常情况下，摩擦现象的存在是有利的，如机动车的刹车系统、运动鞋的波浪底纹；但对于伺服系统，摩擦现象的存在是不利的，抑制系统性能的同时使系统响应出现爬行、振荡或者稳态误差<sup>[79]</sup>。

### 5.2.1 参数辨识

摩擦补偿的前提是构建并辨识出合适的摩擦模型，通过摩擦模型较为准确的描述 TORA 系统物理平台中实际摩擦力的效果，改造第四章所设计的输入转矩，抵消实际摩擦的影响。

典型的摩擦模型有库仑摩擦模型、库仑+粘滞摩擦模型、基于 Stribeck 曲线的指数摩擦模型与基于 Karnopp 摩擦模型等。其中库仑+粘滞摩擦模型由于模型相对简单实用，实际模拟摩擦作用效果较好，本文基于此模型进行摩擦参数辨识。

表 5-2 TORA 系统装置物理参数表

参数	数值	单位	注释
$M$	5.2	kg	平移小车质量
$m$	0.3	kg	旋转小球质量
$k$	1428	N/m	弹簧劲度系数
$r$	0.0695	m	旋转小球的偏心距
$I$	$1.503 \times 10^{-3}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	旋转小球的转动惯量
$g$	9.81	N/kg	重力常数

由精度为 0.5N 的弹簧测力计，取重力加速度为 9.81N/kg，可测得平移小车与旋转小球质量；由精度为 0.02mm 的游标卡尺可测得刚体几何尺寸，并求得旋转小球的转动惯量。所得 TORA 系统物理平台参数如表 5-2 所示。

辨识 TORA 物理平台中直线导轨的摩擦力采用库仑摩擦+粘滞摩擦模型：

$$N_x = \mu_1 (M + m)g \operatorname{sgn}(\dot{x}) + \mu_2 \dot{x} \quad (5-6)$$

其中  $\mu_1 (M + m)g \operatorname{sgn}(\dot{x})$  为库仑摩擦模型， $\mu_2 \dot{x}$  为粘滞摩擦模型； $\mu_1$ 、 $\mu_2$  分别表示为库仑摩擦系数与粘滞摩擦系数。

对 TORA 系统物理平台动力学方程(5-1)引入摩擦模型之后，得到新的系统模型如下：

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x} + mr \cos \theta \ddot{\theta} - mr \sin \theta \dot{\theta}^2 + kx + \mu_1 (M + m)g \operatorname{sgn}(\dot{x}) + \mu_2 \dot{x} &= 0 \\ mr \cos \theta \ddot{x} + (mr^2 + I)\ddot{\theta} &= \tau \end{aligned} \quad (5-7)$$

令旋转小球初始角度  $\theta_0 = \pi/2$ ，初始转矩  $\tau_0 = 0$ ，取平移小车初始位移  $x_0 = 0.0107\text{m}$ ，此时 TORA 系统物理平台蜕化为弹簧-振子系统，且系统运动的任何时刻都有  $\dot{\theta} = \ddot{\theta} \approx 0$ ，因此带入式(5-7)可简化为：

$$(M + m)\ddot{x} + kx + \mu_1 (M + m)g \operatorname{sgn}(\dot{x}) + \mu_2 \dot{x} = 0 \quad (5-8)$$

粘滞系数  $\mu_2$  较小，约在  $10^{-1}$  数量级，经过多次摩擦试验取  $\mu_1 = 0.5$ ；粘滞摩擦力在系统运动中位移  $x$  过零值附近时较大，但平移小车运动时主要是滑动（滚动）摩擦力。在滑动摩擦力的作用下，平移小车每半个周期振幅衰减是一定的，为  $2\mu_1 (M + m)g/k$ 。

由图 5-4 左上处平移小车位移的时域图像所示，平移小车位移  $x$  每半个周期的衰减值约为 0.0012m，将其带入理论分析有：

$$2\mu_1 (M + m)g/k = 0.0012 \quad (5-9)$$

解得  $\mu_1 \approx 0.017$ 。至此，已确定式(5-6)中摩擦力模型。

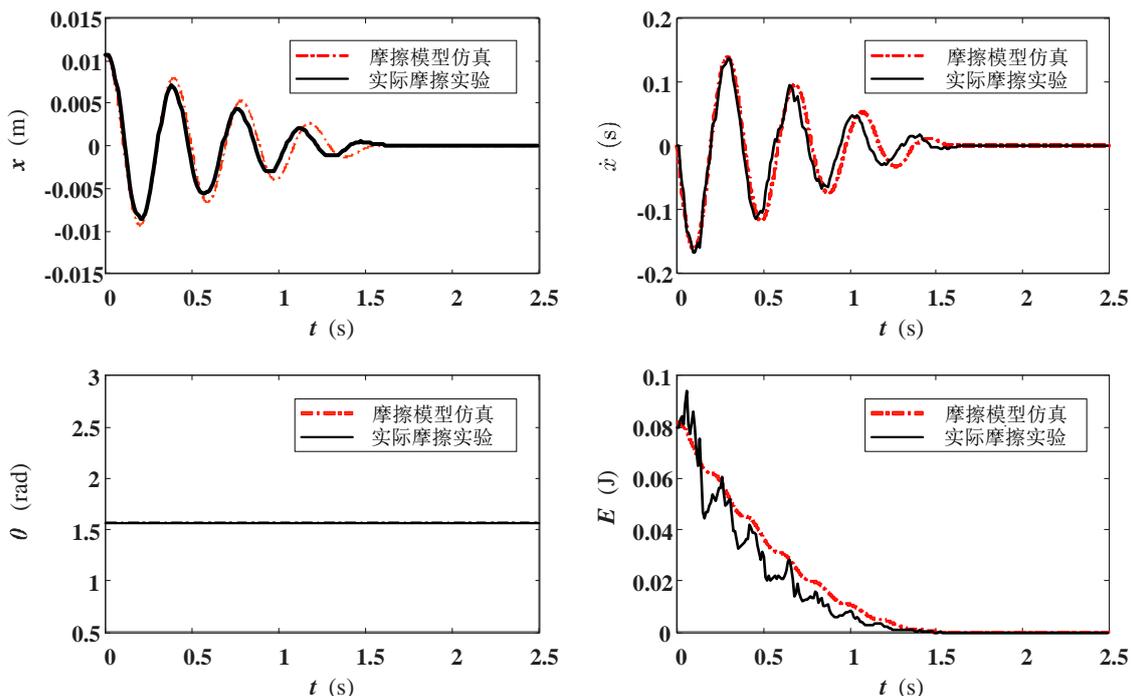


图 5-4 物理平台参数辨识结果仿真图

将  $\mu_1=0.017$ ， $\mu_2=0.5$  带入式(5-6)(5-7)，仿真零输入情况下，TORA 系统蜕化为弹簧-振子系统时振荡阻尼波形；同时与实验平台同等条件下得出的实际波形对比，用以校验参数辨识的正确性，如图 5-4 所示。

由图 5-4 对比可以看出，通过库仑+粘滞摩擦模型难以完全匹配实际 TORA 系统物理平台的摩擦因素，但是系统的周期以及振荡趋势和振荡区间都与仿真结果相一致。平移小车位移  $x$  轨迹波形在低速段时相位略微有偏差，这是所建立的摩擦模型没有深入考虑静摩擦因素导致。需要说明的是式(5-6)所建立的摩擦模型还不够精确，但已基本满足周期性轨迹跟踪过程中动摩擦建模需求。本章主要目的为 TORA 系统实际平台验证所提出的可跟踪周期性轨迹的控制器实用性，所建立的摩擦模型在低速段的平移小车位移  $x$  相位略微有偏差问题在控制过程中可直接避免，这对本文接下来着手摩擦补偿方面的讨论奠定了基础。

### 5.2.2 摩擦补偿方式

为了抑制伺服系统中摩擦现象带来的不利影响，实践中总结出的有效方式主要分为以下三类。

- (1) 改变伺服机械系统的机构设计，减少传动环节。
- (2) 使用润滑剂减小静摩擦与动摩擦间的差值。
- (3) 运用合适的控制补偿方法，实现摩擦环节补偿。

基于现有的 TORA 系统模型，不必要的传动环节省去，直线导轨和平移小车之间使用了润滑剂，在平台设计和物理抑制摩擦方面的有效方法本文都已采用，下面主要讨论第三种方式：通过控制补偿摩擦损耗。

传统的摩擦补偿方法一般分为不基于摩擦模型的补偿方法和基于摩擦模型的补偿方法。其中，不基于摩擦模型的补偿方法的实质是将系统摩擦视为外界干扰，通过改变控制设计的结构或控制策略参数以提高系统抑制外界干扰的能力，间接抑制摩擦因素对系统控制的影响。不基于摩擦模型的方法的主要思路简单，但对于静摩擦非线性的补偿能力不足，提高该方法的摩擦补偿能力又会为伺服系统带来诸如参数时变与机械谐振等问题。

基于摩擦模型的补偿方法的实质是前馈补偿。其基本补偿思路是对系统中的摩擦现象建立（或选择）合适的数学模型，基于此模型中系统状态变量，最后估计摩擦力（或力矩）大小，并将该估计值加入在控制力（或力矩）中，抑制或消除摩擦因素带来的影响。传统的摩擦补偿方法的研究一直是摩擦补偿领域的主流方式，其优点是控制算法相对简单并且实用性好。但是基于摩擦模型的补偿方式缺点在于摩擦模型的选择有较强的试探性质，同时模型参数的确定过程较为复杂。除此之外，摩擦力矩是速度有关的函数，其控制效果还基于速度信号的质量，干扰性和不确定性较为严重。

另外，基于摩擦模型的补偿方法按照补偿方式的不同可分为固定模型补偿方式和自适应补偿方式。针对固定模型补偿方式，摩擦模型的参数可由离线参数辨识获得；对于自适应补偿方式，迭代估计的方法可由摩擦模型参数确定，且控制过程中参数可变。

### 5.3 基于摩擦补偿的能量法控制器再设计

基于摩擦模型补偿方法的须确定某种具有实用性的摩擦模型及参数，通过运动过程中任意时刻系统的状态量得出一个与实际摩擦力大小相同但方向相反的力。在 TORA 系统这类单输入系统中，基于摩擦模型的补偿方法本质为一种前馈补偿方式，通过对系统施加一个额外的控制力矩，来抵消非线性摩擦力矩对系统的影响。其前馈摩擦补偿的基本原理如图 5-5 所示。

由图 5-5 易知，理想无摩擦的控制策略的控制逻辑为闭环控制，给定控制目标与控制参数，生成输入转矩作用于 TORA 系统，TORA 系统的状态量输出并作为反馈量，实现轨迹跟踪控制。由于 TORA 系统物理平台的实际摩擦力存在，在输入转矩处引入摩擦补偿转矩量，该补偿量  $\Delta\tau$  的大小由测量或预估系统状态量确定的摩擦模型生成。实时补偿的转矩抑制摩擦力的不良作用，可实现理论设计的控制策略在 TORA 系统物理平台的应用。

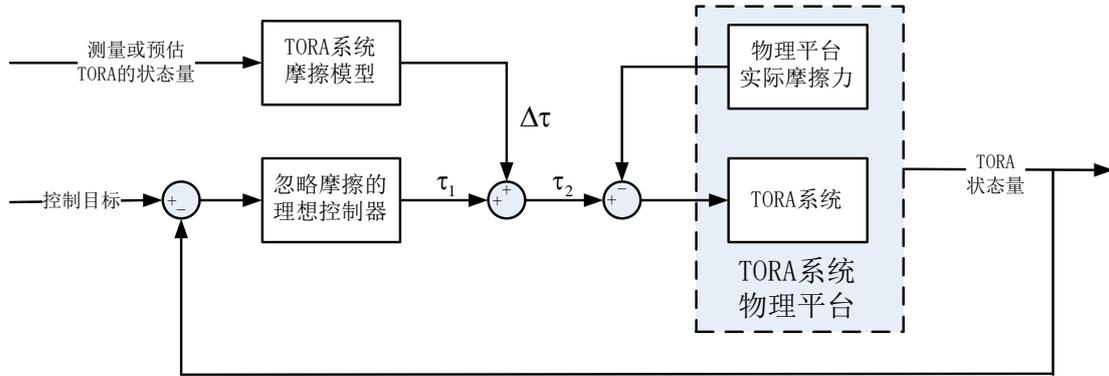


图 5-5 基于摩擦模型的补偿方法原理图

由第四章中所设计的可实现周期性轨迹跟踪的基于能量法控制器：

$$\tau_1 = -\frac{\Delta(k_4\dot{\theta} + k_2e_\theta) + k_3mrh_1 \cos \theta}{k_1e_E\Delta + k_3(M + m)} \quad (5-10)$$

在 TORA 系统实验平台上实践过程中，必然有摩擦力的存在，使得平移小车的振动逐渐衰减至静止。因此，在考虑建立的式(5-6)摩擦力模型下，采用前馈补偿摩擦因素的方式，在输入转矩中对摩擦力进行补偿。有  $\tau_2 = \tau_1 + \Delta\tau$ ， $\Delta\tau$  为输入转矩加入补偿量。

为了实现平移小车的周期性轨迹跟踪，则主要考虑平移小车位移  $x$  及其导数的变化规律，使其达到稳定时以正弦形式等幅振动。对于式(5-1)求  $\ddot{x}$ ：

$$\ddot{x} = -\frac{m_{12}\tau_1 + m_{22}h_1}{\Delta} - \frac{m_{12}\Delta\tau + m_{22}N_x}{\Delta} \quad (5-11)$$

为了补偿掉摩擦  $N_x$  对平移小车加速度  $\ddot{x}$  的影响，令  $m_{12}\Delta\tau + m_{22}N_x = 0$ ，此时：

$$\Delta\tau = -\frac{m_{22}}{m_{12}}N_x \quad (5-12)$$

由于  $m_{12} = mr \cos \theta$ ，当旋转小球转角经过  $\theta = 0.5\pi$  等位置时有  $m_{12} = 0$ ， $\Delta\tau$  趋于无穷。由

于实际直流电机的额定转矩为  $0.494 \text{ N}\cdot\text{m}$ ，因此对此类奇点需要对  $\Delta\tau$  值进行限幅，且尽快使旋转小球通过此类奇点。在仿真过程中发现，当达到稳定状态时，控制器  $\tau_1$  值不超过  $0.2 \text{ N}\cdot\text{m}$ ；不妨设定输入转矩的边界条件如  $|\Delta\tau| \leq 0.2 \text{ N}\cdot\text{m}$ ， $|\tau_2| \leq 0.494 \text{ N}\cdot\text{m}$ 。

同样对于式(5-1)求  $\ddot{\theta}$ ：

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{\Delta} (m_{11}\tau_1 + m_{12}h_1) - \frac{N_x}{m_{12}} \quad (5-13)$$

其中，相比于第四章设计的理想控制器  $\tau_1$  情况下， $\ddot{\theta}$  多了一个周期性变化的量  $-N_x/m_{12}$ ，在平移小车位移振动达到相对稳定时，旋转小球将围绕一个角度振动，通过旋转小球转角的振荡来补偿摩擦力带来的能量损耗，实现平移小车位移的周期性轨迹跟踪。

综上所述，考虑摩擦补偿的基于能量法控制器为：

$$\tau_2 = -\frac{\Delta(k_4\dot{\theta} + k_2e_\theta) + k_3mrh_1 \cos\theta}{k_1e_E\Delta + k_3m_{11}} - \frac{m_{22}}{m_{12}} [\mu_1 m_{11} g \operatorname{sgn}(\dot{x}) + \mu_2 \dot{x}] \quad (5-14)$$

式(5-14)在 PLC 控制器的编程算法逻辑如图 5-6 所示。

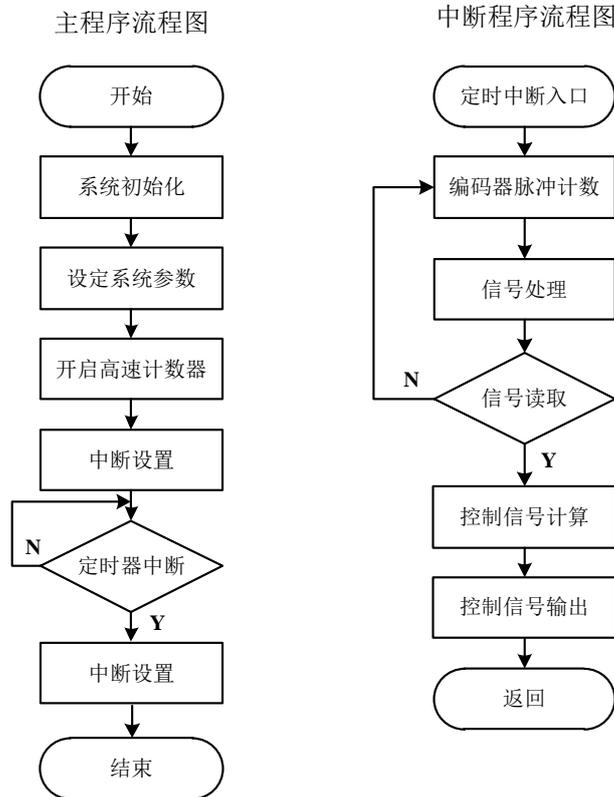


图 5-6 PLC 编程算法

如图 5-6 所示，PLC 内部控制算法逻辑主要分为主程序与中断程序。主程序中首先初始化系统，其主要包含中断初始化、寄存器、定时器以及标志位等一些单元的初始化。其次，设定系统参数，其中包含物理参数、控制器控制参数、摩擦辨识参数与目标周期性轨迹。再次，开启 PLC 内部高速计数器用以准备采集系统状态量。最后设置中断周期为 20ms。

中断程序的如图 5-6 右图所示，拉线编码器与旋转编码器的输出结果通过检测编码

器 A、B 两个脉冲序列的顺序来确定平移小车位移方向与旋转小球旋转方向；经过信号处理，分别计算出国际单位下的平移小车的位移  $x$ 、旋转小球的转角  $\theta$  及其导数。根据得到的平移小车位移  $x$ 、速度  $\dot{x}$ ，旋转小球转角  $\theta$ 、角速度  $\dot{\theta}$  等信息，利用式(5-14)算法得到系统的控制输入转矩信号，该信号转换为数字量，经 DA 变换输出与之对应模拟电压量后输入电机驱动器，电机驱动器根据输入的电压信号转换为电流信号控制电机的运转，最后实现系统的周期性轨迹跟踪控制目标。然后返回到主程序等待下一次中断开始。

### 5.4 实验研究

将式(5-14)中控制器分别应用在 Matlab/Simulink 仿真设计与 TORA 系统实验平台 PLC 编程中，校验与对比该控制器在仿真与实验的控制效果。

该实验与图 4-2 所示的目标周期性轨迹一致。控制器式(5-14)中控制参数选取以及过控制目标点的周期性轨迹如下：

- (1) 控制参数： $k_1 = 1$ ， $k_2 = 10.2$ ， $k_3 = 0.78$ ， $k_4 = 2.25$
- (2) 目标周期性轨迹： $\bar{x}_d(t) = 0.008\sin(16.11t - 0.42\pi)$ ， $\theta_d = 2\pi$
- (3) 边界条件： $|\Delta\tau| \leq 0.2$ ， $|\tau_2| \leq 0.494$

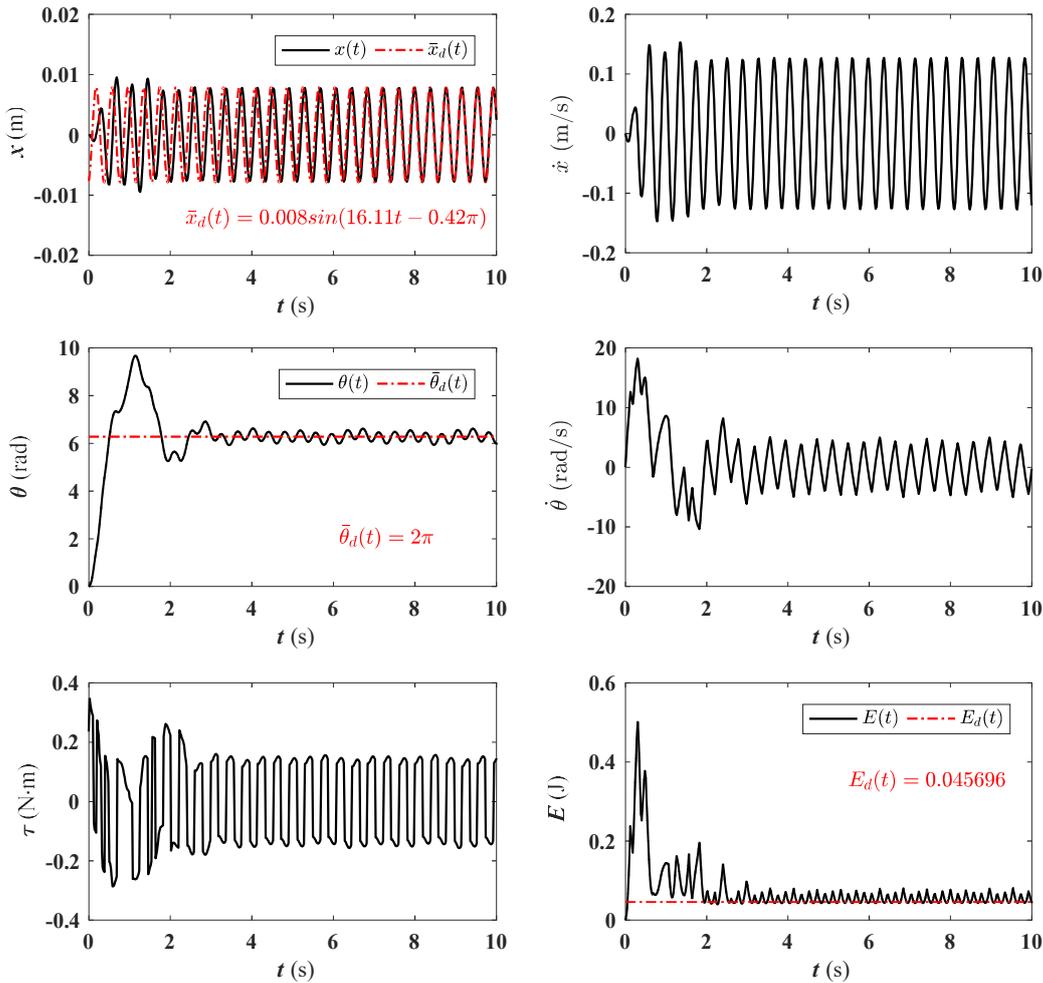


图 5-7 TORA 物理平台仿真波形图

仿真结果如图 5-7 所示，平移小车位移大约 7s 实现目标周期性轨迹跟踪，相比于图 4-2 所示的仿真结果，目标周期性轨迹的振幅基本同时达到，轨迹跟踪的相位差异大约 7s 时才消除。旋转小球转角约 4s 时达到目标轨迹，由于摩擦因素存在，输入转矩在动态稳定时须周期性不断的输入补偿转矩抑制能量的消耗，受输入转矩直驱的旋转小球转角也存在这样的波动性。第三行右图表示了系统总能量的变化情况，易知系统总能量在约 4s 时已达到相对稳定，但略高于无摩擦情况下该目标周期性轨迹的能量值 0.045696，由于无摩擦情况下平移小车位移达到最大时，系统总能量全部转换为弹簧能量；但考虑摩擦因素下补偿转矩时刻抵消摩擦力做功，平移小车位移达到最大时，系统总能量一部分转换为弹簧能量，一部分为旋转小球的旋转动能。

在 TORA 系统物理平台的控制器 PLC 的程序中，通过给定相同的系统参数及边界条件下的实验结果如图 5-8 所示。

- (1) 控制参数：  $k_1 = 1$  ,  $k_2 = 10.2$  ,  $k_3 = 0.78$  ,  $k_4 = 2.25$
- (2) 控制目标：  $\bar{x}_d(t) = 0.008 \sin(16.11t - 0.42\pi)$  ,  $\theta_d = 2\pi$
- (3) 边界条件：  $|\Delta\tau| \leq 0.2$  ,  $|\tau_2| \leq 0.494$

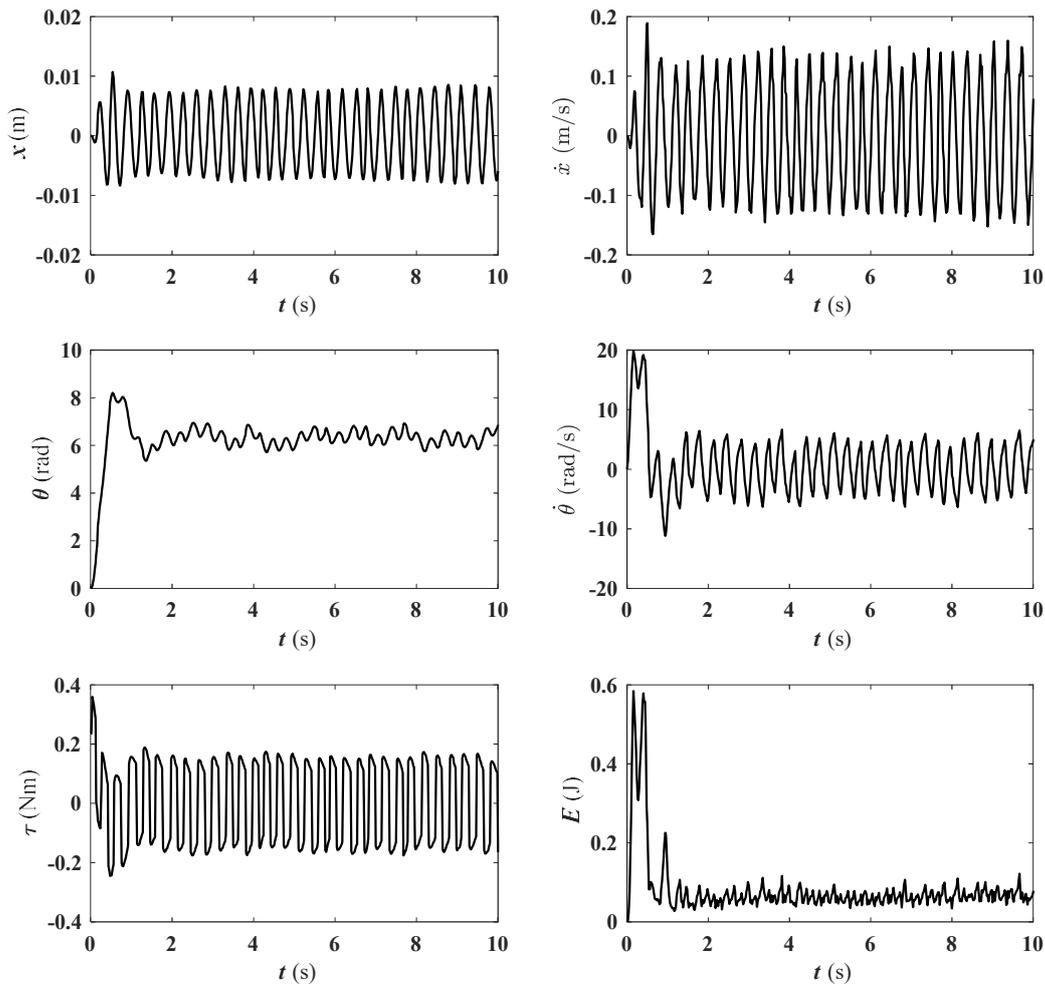


图 5-8 TORA 物理平台实验波形图

可以看到，基于数学模型搭建的 TORA 物理平台仿真波形图 5-7 与实际 TORA 物

理平台实验波形图 5-8 控制效果是一致的。其中小球转角及其导数的时域图像在 1-2s 间有较明显的相位差异，其原因在于实际电机控制设计中未考虑时滞因素，选用的 MAXON 电机机械时间常数为 14.9ms，虽然 PLC 控制中断周期设定 20ms 情况下，并不影响实际电机延时的控制效果，但在短时转角及其转角速度突变情况时，时滞因素则较为明显的表现。

由图 4-2 与图 5-7 的对比分析知，摩擦因素对 TORA 系统周期性轨迹跟踪控制的影响导致旋转小球轨迹及系统总能量时域图像叠加脉动振荡；由图 5-7 与图 5-8 的对比分析知，TORA 物理平台仿真与实际控制效果基本一致，验证了控制器的理论设计的正确性与实用性。

## 5.5 本章小结

本章介绍了 TORA 系统物理装置与周期性轨迹跟踪实验，为实际应用第四章所提出控制策略，首先在 Matlab/Simulink 平台上进行 TORA 系统物理平台仿真。考虑到实际摩擦因素对控制器效果产生的不利影响太大，实际控制器采用前馈补偿的方式，补偿了摩擦因素对 TORA 系统能量的消耗。为了更好的体现该控制策略应用在 TORA 系统上的控制效果，物理实验平台的搭建以及后续的实际仿真结果与理论控制效果进行对比，证明了控制器的理论设计的正确性与实用性。

## 第六章 总结与展望

### 6.1 总结

本文从理论上系统的研究了任意斜面上的欠驱动 TORA 系统动力学模型,具体的研究了 TORA 系统的周期性轨迹跟踪控制策略,完成了基于物理平台的控制器再设计及实物实验。现将本文的主要工作总结归纳如下:

(1) 基于拉格朗日方程,建立了斜面 TORA 系统的动力学模型。针对 TORA 系统中旋转小球动态运动的不同情况,设计了两种典型的正弦周期性轨迹,包括同时实现平移小车和旋转小球周期性振荡的周期性轨迹,以及平移小车周期性运动、旋转小球保持定值的周期性轨迹。当 TORA 系统中平移小车的目标周期性轨迹选为正弦轨迹的平衡位置,且旋转小球的目标角度选为定值时,本文所研究 TORA 系统的轨迹跟踪控制问题可蜕化为平衡点镇定控制问题。

(2) 采用 TORA 系统中广义坐标之间的虚拟约束技术,给出了同时实现平移小车和旋转小球周期性振荡的周期性轨迹跟踪设计。构造了平移小车位移与旋转小球转角间的虚约束方程,联立该虚约束方程与斜面 TORA 系统动力学模型,将斜面 TORA 系统复杂的动力学简化为虚拟微分系统,并对该虚拟微分系统求积分,确定了平移小车和旋转小球周期性振荡的目标周期性轨迹。设计了一个同时含有虚约束跟踪误差和周期性轨迹跟踪误差的控制李雅普诺夫函数,并运用李雅普诺夫稳定第二定理,通过选定合适的参数得到满足系统稳定的控制器,使平移小车位移与旋转小球转角间的虚约束跟踪误差和目标周期性轨迹跟踪误差闭环收敛,从而同时实现平移小车和旋转小球振荡的目标周期性轨迹跟踪。针对 TORA 系统分别位于斜面、垂直平面和水平面三种不同情形,在 Matlab/Simulink 中搭建了控制系统模型对所设计的基于虚约束的控制方案进行了仿真研究,结果表明,所设计的控制方案均可有效实现目标周期性轨迹的跟踪控制。

(3) 鉴于虚约束控制方法设计过程及控制器的复杂性,且旋转小球在实际应用中的控制目标通常是旋转小球转角静止到目标角度,给出了一种基于系统能量的控制设计方案,以实现平移小车的周期性轨迹跟踪控制和旋转小球转角的定值控制。该方案根据 TORA 系统总能量守恒的思想通过控制输入转矩为动力学系统注入能量,使 TORA 系统具有可使平移小车达到目标周期性轨迹的能量,并消耗旋转小球转角在镇定到目标角度过程中的多余动能,最终实现系统总能量守恒并以平移小车动能和弹簧弹性势能的形式在系统中相互转化。设计了同时含有 TORA 系统总能量误差、旋转小球转角误差和角速度误差的控制李雅普诺夫函数,根据李雅普诺夫稳定第二定理,通过选定合适的参数得到满足系统稳定的控制器,实现旋转小球静止到目标角度,同时平移小车达到目标周期性轨迹。基于系统能量守恒思想设计的 TORA 平移小车目标周期性轨迹跟踪控制方案,其设计过程较为简洁;对该方案和虚拟约束控制方案进行了对比仿真分析,结果表明,基于系统能量的控制方案将平移小车的周期性轨迹跟踪时间缩短至原来的 1/3,说明了

该设计方案的可行性与优越性。

(4) 搭建了 TORA 系统实验平台并对提出的基于系统能量的控制设计方案进行了实验研究。未驱动小车的直线运动采用直线轴承导轨实现，驱动小球的运动通过 Maxon 直流盘式无刷电机驱动，控制器采用西门子 S7-200 型 PLC (Programmable Logic Controller) 实现，小车直线位移和小球转角均由高分辨率旋转编码器实现检测；并基于 VC++ 开发了 PC 上位机监控系统。鉴于 TORA 系统装置平台中平移小车振荡过程与直线导轨间的摩擦力影响目标周期性轨迹跟踪的控制效果，建立了平移小车与直线导轨间以滑动和粘滞为主的动摩擦模型，并对装置平台平移振荡过程中的摩擦力进行参数辨识。基于辨识的装置平台动摩擦模型，设计合适的摩擦补偿转矩消除摩擦力对轨迹跟踪控制的影响，并选择前馈补偿的方式将其叠加至基于系统能量控制方案中的输入转矩，给出了一种基于摩擦补偿的能量法轨迹跟踪控制策略；该策略有效实现了 TORA 装置平台的目标周期性轨迹跟踪控制。实验结果与数字仿真相互证明了基于摩擦补偿的能量法轨迹跟踪控制策略的有效性和实用性。

## 6.2 展望

本文对欠驱动 TORA 系统周期性轨迹跟踪控制问题进行了系统而深入的研究，取得了四方面具有一定新意的研究成果；但是，对于欠驱动 TORA 系统的控制器设计问题和周期性轨迹跟踪问题，作者认为至少还需要在以下三个方面进行进一步的探讨和研究：

1、TORA 系统的周期性轨迹能控性理论。本文在系统平衡点能控性的基础上，研究了若干可控的周期性轨迹跟踪问题，关于周期性轨迹的能控性理论还需进一步建立。自由度间的耦合作用是欠驱动系统欠驱动特性的固有因素，本文也就是应用 TORA 系统中平移小车与旋转小球两个自由度间的耦合作用控制电机输出转矩实现系统的周期性轨迹跟踪。但是，目前由于在自由度耦合作用方面的研究仅停留在定性分析层面上，并不能很好地说明旋转小球旋转程度如何时，平移小车恰巧达到目标周期性轨迹。本文给出一些验证性仿真与实验都是较为特殊的控制目标，仅说明了旋转小球特定的某些旋转角度可实现平移小车跟踪到某些特定的周期性轨迹，至于旋转小球的角度范围和边界条件尚缺乏理论方面的定量分析与确定。

2、本文针对 TORA 系统实验平台的摩擦模型是基于动摩擦模型建模，只针对运动幅值较大情况下，与实际摩擦影响具有较高的拟合效果。所建立的摩擦模型参数辨识环节，除了按照微分方程解析得到外，粘滞摩擦系数为试凑得出，相对而言缺少一定的理论严谨性。在 TORA 系统实验平台的静摩擦力辨识层面，以及摩擦模型的完善层面还有待于进一步研究。

3、虽然本文设计的基于能量法的控制方法在 TORA 系统实验平台验证了实用性，但基于虚拟约束法的控制策略在 PLC 编程实现中极其复杂，仅在仿真层面上给予了验证。今后的工作可以采用可实现较为复杂运算的控制器，比如 ARM 开发板、DSP 等验证其控制实用性。另外，今后的工作可以将本文所设计的 TORA 系统实验平台完善，进一步推广验证先前学者所提出的各自仿真型控制策略。

## 参考文献

- [1] 程丽. 五自由度并联机床冗余驱动理论与实验研究[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2010.
- [2] 郑仁成. 5-UPS/PRPU 并联机床的冗余驱动研究[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2006.
- [3] 刘殿通. 一类欠驱动机械系统的智能控制研究[D]. 北京: 中国科学院自动化研究所, 2003.
- [4] 程红太. 一类欠驱动机械系统动态伺服控制研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2011.
- [5] Fantoni I, Lozano R. Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems[M]. Springer London, 2002.
- [6] 高丙团. 一类欠驱动机械系统的非线性控制研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2007.
- [7] Spong M W. Partial feedback linearization of underactuated mechanical systems[C]// IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems. 1994: 314-321.
- [8] 张晓华, 郭源博, 周鑫, 等. PWM 整流器的欠驱动特性与非线性控制[J]. 中国电机工程学报, 2011, 31(33): 85-92.
- [9] 周鑫, 郭源博, 张晓华, 等. 基于自适应跟踪控制的三相电压型 PWM 整流器[J]. 中国电机工程学报, 2010, 30(27): 76-82.
- [10] 郭源博. 静止同步补偿器的欠驱动特性与非线性控制[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2012.
- [11] 张晓华, 许传明, 郭源博. 基于反馈线性化的 STATCOM 控制研究[J]. 控制工程, 2011, 18(03): 327-330.
- [12] Waldeck B. The Lyapunov direct method for the stabilisation of the ball on the actuated beam[J]. International Journal of Control, 2009, 82(12): 2169-2178.
- [13] Li E, Liang Z Z, Hou Z G, et al. Energy-based balance control approach to the ball and beam system[J]. International Journal of Control, 2009, 82(6): 981-992.
- [14] Awatar S, Bernard C, Boklund N, et al. Mechatronic design of a ball-on-plate balancing system[J]. Mechatronics, 2002, 12(2): 217-228.
- [15] Burg T, Dawson D, Rahn C, et al. Nonlinear control of an overhead crane via the saturating control approach of Teel[C]. Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1996: 3155-3160.
- [16] 孙宁. 欠驱动吊车轨迹规划与非线性控制策略设计、分析及应用[D]. 天津: 南开大学, 2014.
- [17] Spong M W. Underactuated mechanical systems[M]// Control problems in robotics and automation. Springer Berlin Heidelberg. 1998: 135-150.
- [18] Olfati-Saber R. Fixed point controllers and stabilization of the cart-pole system and the rotating pendulum[C]. Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona USA, 1999: 1174-1181.

- [19]Fierro R, Lewis F L, Lowe A. Hybrid control for a class of underactuated mechanical systems[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans, 1999, 29(6): 649-654.
- [20]刘倩, 李小缤, 韩艳红, 等. 基于模糊聚合式滑模方法的欠驱动系统控制[J]. 控制工程, 2011, 9(S1): 52-55.
- [21]Astrom K J, Furuta K. Swinging up a pendulum by energy control[J]. Automatica, 2000, 36(2): 287-295.
- [22]高丙团, 张晓华, 陈宏钧. 基于快速起摆的 Furuta 摆切换控制系统[J]. 控制与决策, 2008, 23(11): 1277-1280.
- [23]Lü J H, Yu X H, Chen G R. Chaos synchronization of general complex dynamical networks[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2004, 334(1): 281-302.
- [24]Li Z, Chen G R. Robust adaptive synchronization of uncertain dynamical networks[J]. Physics Letters A, 2004, 324(2-3): 166-178.
- [25]Fantoni I, Lozano R, Spong M W. Energy based control of the Pendubot[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(4): 725-729.
- [26]Banavar R N, Mahindrakar A D. Energy-based swing-up of the acrobot and time-optimal motion[C]. Proceedings of 2003 IEEE Conference on Control Applications, 2003: 706-711.
- [27]Xin X, Kaneda M. The swing up control for the acrobot based on energy control approach[C]. Proceedings of 41st IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, United States, 2002: 3261-3266.
- [28]Xia D Y, Wang L Y, Chai T Y. Neural-Network-Friction Compensation-Based Energy Swing-Up Control of Pendubot[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2014, 61(3): 1411-1423.
- [29]Olfati-Saber R. Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles[D]. Boston: Massachusetts Institute of Technology, 2001.
- [30]夏德银. 一类欠驱动机械系统的起摆控制方法研究[D]. 沈阳: 东北大学, 2014.
- [31]Xin X, Kaneda M. New analytical results of the energy based swinging up control of the acrobot[C]. Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control, Nassau, Bahamas, 2004: 704-709.
- [32]Xin X, Yamasaki T. Energy-based swing-up control for a remotely driven acrobot: Theoretical and experimental results[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2012, 20(4): 1048-1056.
- [33]程红太, 张晓华. 基于虚约束的 Acrobot 动态伺服控制统一设计方法[J]. 控制与决策, 2012, 27(6): 923-928.

- [34]程红太, 张晓华. 一类欠驱动机械系统的虚约束动态伺服控制[J]. 浙江大学学报(工学版), 2011, 45(5): 818-824.
- [35]程红太, 赵旖旎, 张晓华. Acrobot 动态伺服控制及其对称虚约束方法研究[J]. 自动化学报, 2010, 36(11): 1594-1600.
- [36]赖旭芝, 余锦华, 吴敏. 欠驱动机械系统控制[M]. 北京: 科学出版社, 2013.
- [37]赖旭芝. 一类非完整欠驱动机械系统的智能控制[D]. 长沙: 中南大学, 2001.
- [38]张安彩, 赖旭芝, 余锦华, 等. 基于倒转方法的欠驱动 Acrobot 系统稳定控制[J]. 自动化学报, 2012, 38(8): 1263-1269.
- [39]刘一宏, 余跃庆. 3R 欠驱动机械臂轨迹跟踪实验研究[J]. 航空精密制造技术, 2011, 47(6): 47-49.
- [40]Gao B T, Zhang X H, Chen H J, et al. Energy-Based Control Design of an Underactuated 2-Dimensional TORA System[C]// the 2009 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. St. Louis, USA: 2009: 1296-1301.
- [41]Gao B T, Ye F. Fuzzy Lyapunov synthesis control of an underactuated 2DTORA system[J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2015, 28: 581-589.
- [42]杨洁. 高阶滑模控制理论及其在欠驱动系统中的应用研究[D]. 北京: 北京理工大学, 2015.
- [43]武宪青, 何熊熊. 欠驱动 RTAC 系统的自适应耦合控制器设计[J]. 自动化学报, 2015, 41(5): 1047-1052.
- [44]Pavlov A, Janssen B, Van de Wouw N, et al. Experimental output regulation for the TORA system[C]. Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control, Seville, USA, 2005: 1108-1113.
- [45]Bupp R T, Bernstein D S, Coppola V T. A benchmark problem for nonlinear control design[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 1998, 8: 307-310.
- [46]Wan C J, Bernstein D S, Coppola V T. Global stabilization of the oscillating eccentric rotor[J]. Nonlinear Dynamics, 1996, 10(1): 49-62.
- [47]Jankovic M, Fontaine D, Kokotovic P V. TORA example: cascade- and passivity-based control designs[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 1996, 4(3): 292-297.
- [48]Burg T, Dawson D. Additional notes on the TORA example: A filtering approach to eliminate velocity measurements[J]. IEEE Transactions on control systems technology, 1997, 5(5): 520-523.
- [49]Jiang Z P, Kanellakopoulos I. Global output-feedback tracking for a benchmark nonlinear system[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(5): 1023-1027.
- [50]Petres Z, Baranyi P, Hashimoto H. Approximation and complexity trade-off by TP model transformation in controller design: A case study of the TORA system[J]. Asian Journal of Control, 2010, 12(5): 575-585.

- [51] Fabio C. Output regulation for the TORA benchmark via rotational position feedback[J]. *Automatica*, 2011, 47(3): 584-590.
- [52] Escobar G, Ortega R, Sira-Ramirez H. Output-feedback global stabilization of a nonlinear benchmark system using a saturated passivity-based controller[J]. *IEEE Transactions on control systems technology*, 1999, 7(2): 289-293.
- [53] Gao B T, Xu J, Zhao J G, et al. Stabilizing control of an underactuated 2-dimensional TORA with only rotor angle measurement[J]. *Asian Journal of Control*, 2013, 15(3): 1477-1488.
- [54] Ortega R, Loria A, Kelly R, et al. On Passivity-Based Output Feedback Global Stabilization Of Euler-Lagrange Systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1995, 5(4): 381-386.
- [55] Buppó R T, Bernstein D S, Coppola V T. A benchmark problem for nonlinear control design: problem statement, experimental testbed, and passive nonlinear compensation[C]. *Proceedings of American Control Conference*, Seattle, 1995: 4363-4367.
- [56] Lee C-H, Chang S-K. Experimental implementation of nonlinear TORA system and adaptive backstepping controller design[J]. *Neural Computing Applications*, 2012, 21(4): 785-800.
- [57] 高丙团, 张晓华, 陈宏钧. TORA 的动力学建模与 Backstepping 控制[J]. *控制与决策*, 2007, 22(11): 1284-1288.
- [58] 高丙团. TORA 的动力学建模及基于能量的控制设计[J]. *自动化学报*, 2008, 34(9): 1221-1224.
- [59] Gao B T, Ye F. Dynamical Analysis and Stabilizing Control of Inclined Rotational Translational Actuator Systems[J]. *Journal of Applied Mathematics*, 2014, Article ID 598384: 9 pages.
- [60] 许清媛, 杨智, 范正平, 等. 一种非线性观测器和能量结合的反馈控制系统[J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(1): 31-36.
- [61] 戴婉君, 杨智, 范正平, 等. TORA 系统的控制和跟踪策略设计[J]. *信息与控制*, 2012, 41(3): 314-318.
- [62] She J H, Zhang A C, Lai X Z, et al. Global stabilization of 2-DOF underactuated mechanical systems-an equivalent-input-disturbance approach[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 69: 495-509.
- [63] 武宪青, 欧县华, 何熊熊. 增强耦合的 TORA 系统镇定控制方法设计[J]. *控制与决策*, 2015, 30(6): 1039-1043.
- [64] 武宪青, 何熊熊. 欠驱动基准系统的约束控制[J]. *控制理论与应用*, 2015, 32(12): 1692-1697.
- [65] 刘庆波, 余跃庆. 平面 2R 欠驱动机器人的轨迹规划与控制[J]. *中国机械工程*, 2007, 18(24): 2899-2902.

- [66]刘庆波, 余跃庆, 苏丽颖. 欠驱动机器人最优运动轨迹生成与跟踪控制[J]. 机械工程学报, 2009, 45(12): 15-21.
- [67]杨兴明, 朱建, 高银平, 等. 欠驱动移动机器人的路径跟踪控制[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2014, 37(1): 53-58.
- [68]Ailon A. Simple Tracking Controllers for Autonomous VTOL Aircraft With Bounded Inputs[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(3): 737-743.
- [69]Korkmaz O, Ider S K, Ozgoren M K. Trajectory Tracking Control of an Underactuated Underwater Vehicle Redundant Manipulator System[J]. Asian Journal of Control, 2016.
- [70]Chung C C, Hauser J. Nonlinear control of a swinging pendulum[J]. Automatica, 1995, 31(6): 851-862.
- [71]Shiriaev A, Perram J W, Canudas-de-Wit C. Constructive Tool for Orbital Stabilization of Underactuated Nonlinear Systems Virtual Constraints Approach[J]. IEEE transactions on automatic control, 2005, 50(8): 1164-1176.
- [72]Shiriaev A, Robertsson A, Perram J, et al. Periodic motion planning for virtually constrained Euler - Lagrange systems[J]. Systems & Control Letters, 2006, 55: 900-907.
- [73]Shiriaev A, Freidovich L B, Robertsson A, et al. Virtual-Holonomic-Constraints-Based Design of Stable Oscillations of Furuta Pendulum: Theory and Experiments[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2007, 23(4): 827-832.
- [74]La Hera P X, Freidovich L B, Shiriaev A S, et al. New approach for swinging up the Furuta pendulum: Theory and experiments[J]. Mechatronics, 2009, 19(8): 1240-1250.
- [75]Cheng H T, Chen H P, Zhang X H, et al. Periodic Trajectory Generation and Tracking Control for a Class of Underactuated Mechanical Systems[C]. Proceedings of the 2012 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics, Guangzhou, 2012: 1817-1822.
- [76]包宇庆. 欠驱动 2DTORA 系统的滑模变结构控制设计[D]. 南京: 东南大学, 2012.
- [77]Gao B T, Song H G, Zhao J G, et al. Dynamics and energy-based control of TORA system on a slope[C]. Proceedings of the 2013 IEEE International Conference on Cyber Technology in Automation, Control and Intelligent Systems, Nanjing, 2013: 373-378.
- [78]Cheng H T, Chen H P, Gao B T, et al. General Swing-up Methodology for the Vertical Three-link Underactuated Manipulator[C]. Proceedings of the 2013 IEEE International Conference on Cyber Technology in Automation, Control and Intelligent Systems, Nanjing, 2013: 379-384.
- [79]刘强, 尔联洁, 刘金琨. 摩擦非线性环节的特性、建模与控制补偿综述[J]. 系统工程与电子技术, 2002, 24(11): 45-52.



## 攻读硕士期间的研究成果

### 一、发表论文

- [1] Gao Bingtuan, **Liu Chuande**, Cheng Hongtai. Virtual constraints based control design of an inclined translational oscillator with rotational actuator system. Shock and Vibration, 2015, Article ID 769151, 9 pages. (SCI 收录)
- [2] Xu Jing, Gao Bingtuan, **Liu Chuande**, et al. An omnidirectional 3D sensor with line laser scanning. Optics and Lasers in Engineering, 2016, 84: 96-104. (SCI 收录)
- [3] Gao Bingtuan, **Liu Chuande**, Zheng Gongbei. Orbitally stabilizing control design for an underactuated RTAC. Asian Journal of Control. (在审)

### 二、申请专利

- [1] 高丙团, **刘传德**, 谢吉华. 一种具有旋转激励的平移振荡装置的周期性轨迹控制方法. 已公开, 中国发明专利, 201610004396.6



## 致 谢

论文至此，即将谢幕。论文基于前人的研究做出了些许的改进与应用，其顺利完成得益于站在巨人的肩；课题在两年多的硕士生阶段已尽力地切磋琢磨，所习得的学术经历得益于诸多帮助过我的人。

感谢吉华老师在研究生课程的教导。谢老师专业学识深厚，上课认真负责，其严谨敬业的态度深深地影响着我，其独特的人格魅力是我以后学习的榜样。

感谢高丙团老师对我的学术启蒙与悉心指导，论文的顺利完结也凝结了高老师的心血。高老师在科研上总是有自己独特的见解，使我避免了走很多弯路；在待人接物上总是有自己秉持的原则，使我逐渐领悟到做人做事的细节。

感谢中国电科院的陈宁博士、张磊高工，在新能源研究所的实习收获很多，特别是在学校与单位间角色转换、科研思路转变方面的点拨依然牢记。

感谢东北大学程红太副教授，在本课题早期推动和思路点拨方面程老师均细致简洁地开导，使我在具体控制实施方面有深刻的理解。

感谢课题组内各位同门伴随我一起度过充实的生活。也感谢已毕业的叶飞、张文虎师兄，欠驱动系统的课题承接了叶飞的前期工作；也记得那时在动力楼 305 与张文虎相伴的时光。特别感谢博士生姜雷杰，硕士生吴诚、朱振宇、郑功倍，在欠驱动系统装置平台的搭建和控制调试阶段均给予了莫大的帮助，实验的顺利进行得益于各位群策群力。

感谢宿舍里友好和善的三位室友，在每个看似平静的日常都能带来欢乐，带我一起吃遍新街口、湖南路上的美食，聊以慰藉若干个精神紧张的攻关时刻。

感谢家人的支持与理解。无数来自家乡的日常问候使我在他乡读研更为专注和勇敢，求学至今的坚持更得益于父母兄嫂一直开明的思想和永恒的鼓励。

感谢其他帮助过和点拨过我的人，在此衷心地谢过。

